Mathématiques 536
Réflexion 7
Tome 2

COMMISSION
SCOLAIRE DE LAVAL

Guy Breton

5e SECONDAIRE

Réflexions mathématiques 536

TOME 1

C·O·R·R·I·G·É

DU MANUEL DE L'ÉLÈVE

CEC
LES ÉDITIONS CEC INC.

8101, boul. Métropolitain Est, Anjou, Qc, Canada H1J 1J9
Téléphone : (514) 351-6010 Télécopieur : (514) 351-3534

Nous avons indiqué, pour chaque composante des rubriques *Maîtrise*, la lettre correspondant au code de couleurs utilisé dans le manuel. Vous trouverez, à la page III du manuel, tome 1, la signification de ce code de couleurs.

$\boxed{\textbf{B}}$: bleu

$\boxed{\textbf{V}}$: vert

$\boxed{\textbf{R}}$: rouge

$\boxed{\textbf{N}}$: noir

$\boxed{\textbf{J}}$: jaune

R·É·F·L·E·X·I·O·N 7

page 220

L'exploration des fonds marins

a) ≈ 953,9 m

b) ≈ 1526,5 m

c) $\dfrac{\text{Mesure de la cathète opposée à l'angle}}{\text{Mesure de la cathète adjacente à l'angle}}$

d) ≈ 68,2°

page 221

e) 1) ≈ 1,88 2) 60°
3) ≈ 14,0° 4) ≈ 14,0°
5) ≈ 45,6° 6) ≈ 2,31
7) ≈ 81,85 8) ≈ 18,4°

f) (Autres réponses possibles.)

1) $$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\text{mesure de la cathète opposée à l'angle } A/\text{mesure de l'hypoténuse}}{\text{mesure de la cathète adjacente à l'angle } A/\text{mesure de l'hypoténuse}}$$

$$= \frac{\text{mesure de la cathète opposée à l'angle } A}{\text{mesure de l'hypoténuse}} \bullet \frac{\text{mesure de l'hypoténuse}}{\text{mesure de la cathète adjacente à l'angle } A}$$

$$= \frac{\text{mesure de la cathète opposée à l'angle } A}{\text{mesure de la cathète adjacente à l'angle } A}$$

$$= \tan A$$

2) $$\frac{\text{cosec } A}{\sec A} = \frac{\text{mesure de l'hypoténuse/mesure de la cathète opposée à l'angle } A}{\text{mesure de l'hypoténuse/mesure de la cathète adjacente à l'angle } A}$$

$$= \frac{\text{mesure de l'hypoténuse}}{\text{mesure de la cathète opposée à l'angle } A} \bullet \frac{\text{mesure de la cathète adjacente à l'angle } A}{\text{mesure de l'hypoténuse}}$$

$$= \frac{\text{mesure de la cathète adjacente à l'angle } A}{\text{mesure de la cathète opposée à l'angle } A}$$

$$= \cot A$$

g) 1) *A* 2) cos 3) *A*
4) sin 5) *A* 6) cot

page 222

h) Dans un triangle rectangle, la cathète opposée à l'angle de 30° vaut la moitié de l'hypoténuse.

i) 1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 2) $\sqrt{3}$

j) (Autres réponses possibles.)
La relation de Pythagore appliquée à un triangle rectangle isocèle.

k) 1

page 223

Investissement 1

1. *a)* $\frac{x}{z}$ *b)* $\frac{x}{z}$ *c)* $\frac{x}{y}$
   d) $\frac{z}{y}$ *e)* $\frac{z}{y}$ *f)* $\frac{x}{y}$

2. *a)* 0,174 *b)* 0,940 *c)* 2,747
   d) 1,015 *e)* 1,390 *f)* 0,649

3. *a)* $\sin S = \frac{5}{13}$ $\cos S = \frac{12}{13}$ $\tan S = \frac{5}{12}$
   b) $\sin S = \frac{\sqrt{5}}{5}$ $\cos S = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\tan S = \frac{1}{2}$

4. *a)* 70 cm et $35\sqrt{3}$ cm ≈ 60,62 cm
   b) ≈ 40,6° et ≈ 49,4°

5. *a)* 0 *b)* $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ *c)* 2 *d)* 1

page 224

6. *a)* $\frac{\sqrt{7}}{4} \approx 0{,}6614$ *b)* $\frac{5\sqrt{61}}{61} \approx 0{,}6402$
   c) $\frac{\sqrt{91}}{10} \approx 0{,}9539$

7. *a)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *b)* $\frac{4\sqrt{17}}{17} \approx 0{,}9701$
   c) $\frac{1}{2}$ *d)* ≈ 0,2588

8. $A \approx 33{,}7°$
   $B \approx 56{,}3°$
   $D \approx 38{,}7°$

9. ≈ 30,8°

10. $$\cot(90° - W) = \frac{\cos(90° - W)}{\sin(90° - W)} = \frac{\sin W}{\cos W} = \tan W$$

11. $\frac{20\sqrt{3}}{3} \approx 11{,}55$ cm

12. *a)* 1) $A = 45°$ 2) $A = 45°$
   3) $B = 30°$ 4) $B = 30°$
   b) 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $\sqrt{2}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

13. *a)* ≈ 4,42 m *b)* ≈ 1,70 m

page 225

14. $$(\cos x)(\sin y \cdot \tan z + \cos y) = \frac{m\,\overline{AC}}{m\,\overline{AB}}\left(\frac{m\,\overline{AD}}{m\,\overline{AC}} \cdot \frac{m\,\overline{ED}}{m\,\overline{AD}} + \frac{m\,\overline{DC}}{m\,\overline{AC}}\right)$$
$$= \frac{\cancel{m\,\overline{AC}}}{1} \cdot \frac{\cancel{m\,\overline{AD}}}{\cancel{m\,\overline{AC}}} \cdot \frac{m\,\overline{ED}}{\cancel{m\,\overline{AD}}} + \frac{\cancel{m\,\overline{AC}}}{1} \cdot \frac{m\,\overline{DC}}{\cancel{m\,\overline{AC}}}$$
$$= m\,\overline{ED} + m\,\overline{DC}$$
$$= m\,\overline{EC}$$

15. *a)* La valeur du sinus augmente de 0 à 1.
   b) La valeur du cosinus diminue de 1 à 0.
   c) Pour $45° < x \leq 90°$.
   d) Parce que $\tan 90° = \frac{\sin 90°}{\cos 90°}$ et que $\cos 90° = 0$; la division par 0 n'est pas définie.

16. *a)* Oui, car $m\angle B = m\angle D = 40°$.
   b) ≈ 2,38 cm
   c) ≈ 2,33 cm
   d) ≈ 1,68 cm

17. *a)* ≈ 16,29 m *b)* ≈ 3,5°

Forum

a) La touche SIN^{-1} permet de trouver la mesure d'un angle de -90° à 90° et dont on connaît la valeur du sinus.
La touche COS^{-1} permet de trouver la mesure d'un angle de 0° à 180° et dont on connaît la valeur du cosinus.

La touche TAN^{-1} permet de trouver la mesure d'un angle -90° et 90° et dont on connaît la valeur de la tangente.

b) Pour calculer cosec x, on fait $\frac{1}{\sin x}$.

Pour calculer sec x, on fait $\frac{1}{\cos x}$.

Pour calculer cot x, on fait $\frac{1}{\tan x}$.

page 226

Mesurer ses performances à vélo

a) 1) 360° 2) $(2\pi r)$ cm

b) 2π fois.

c) $\approx$ 57,296°

d) 1) 2π rad 2) π rad 3) 4π rad

page 227

e) 1) $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ 2) $\approx$ 57,3°

f) 1) $\frac{\pi}{180}$ rad 2) $\approx$ 0,017 rad

g) $\frac{n\pi}{180}$ rad

h) $\left(\frac{180\,\theta}{\pi}\right)^\circ$

page 228

i) 1) r 2) $2r$ 3) $3{,}25r$ 4) $0{,}1r$

j) $L = \frac{\pi r n}{180}$

page 229

Investissement 2

1. *a)* $\frac{7\pi}{36}$ rad *b)* $\frac{5\pi}{9}$ rad
   c) $\frac{4\pi}{3}$ rad *d)* $\frac{25\pi}{9}$ rad
   e) $\frac{13\pi}{36}$ rad *f)* $\frac{5\pi}{3}$ rad
   g) $\frac{50\pi}{9}$ rad *h)* $\frac{\pi}{360}$ rad

2. *a)* $\approx$ 171,9° *b)* 18°
   c) $\approx$ 573,0° *d)* $\approx$ 28,6°
   e) $\approx$ 143,2° *f)* 135°
   g) 1 080° *h)* $\approx$ 0,057°

3.

	Mesure de l'angle	
	en degrés	en radians
1 tour	360	2π
$\frac{1}{4}$ tour	90	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{16}$ tour	22,5	$\frac{\pi}{8}$
5 tours	1800	10π
$\frac{1}{360}$ tour	1	$\frac{\pi}{180}$
$\frac{1}{2\pi}$ tour	$\approx$ 57,3	1

4. *a)* $45° = \frac{\boxed{\pi}}{\boxed{4}}$ rad *b)* $30° = \frac{\boxed{\pi}}{\boxed{6}}$ rad

   $90° = \frac{\boxed{\pi}}{\boxed{2}}$ rad $\boxed{60°} = \frac{\pi}{3}$ rad

   $\boxed{135°} = \frac{3\pi}{4}$ rad $120° = \frac{\boxed{2\pi}}{\boxed{3}}$ rad

   $\boxed{180°} = \pi$ rad $\boxed{150°} = \frac{5\pi}{6}$ rad

   $225° = \frac{\boxed{5\pi}}{\boxed{4}}$ rad $\boxed{210°} = \frac{7\pi}{6}$ rad

   $270° = \frac{\boxed{3\pi}}{\boxed{2}}$ rad $240° = \frac{\boxed{4\pi}}{\boxed{3}}$ rad

   $\boxed{315°} = \frac{7\pi}{4}$ rad $300° = \frac{\boxed{5\pi}}{\boxed{3}}$ rad

   $\boxed{330°} = \frac{11\pi}{6}$ rad

5. $\approx$ 0,5586 rad

page 230

6. m $\overset{\frown}{AB} = 2\pi$ cm $\approx$ 6,28 cm

   m $\overset{\frown}{CD} = \frac{5\pi}{2}$ cm $\approx$ 7,85 cm

   m $\overset{\frown}{EF} = \frac{167\pi}{50}$ cm $\approx$ 10,5 cm

7. *a)* $\frac{2\pi}{7}$ cm ($\approx$ 0,90 cm)
   b) $\frac{25\pi}{18}$ cm ($\approx$ 4,36 cm)
   c) $\frac{4\pi}{3}$ m ($\approx$ 4,19 m)

8. *a)* $\frac{3}{\pi}$ cm ($\approx$ 0,95 cm)
   b) $\frac{135}{11\pi}$ cm ($\approx$ 3,91 cm)
   c) $\frac{6}{7\pi}$ m ($\approx$ 0,27 m)

9. *a)* $\approx$ 286,5° ou 5 rad
   b) 11,5° ou $\frac{1}{5}$ rad

10. Il permet de calculer rapidement la mesure de l'arc intercepté par les côtés d'un angle au centre.

11.

degrés	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360
radians	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{9}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{9}$	$\frac{8\pi}{9}$	π	$\frac{10\pi}{9}$	$\frac{11\pi}{9}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{13\pi}{9}$	$\frac{14\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{16\pi}{9}$	$\frac{17\pi}{4}$	2π

12. 1^er^ angle = $\frac{11\pi}{2}$ rad

2^e^ angle = $\frac{27\pi}{10}$ rad

3^e^ angle = $\frac{2\pi}{5}$ rad

13. *a)* $\frac{121}{46}\pi$ rad $\approx$ 7,92 rad

b) $\approx$ 50 486,38 km

page 231

14. *a)* 1) 450° 2) $\frac{5\pi}{2}$ rad

b) 1) 37,5° 2) $\frac{5\pi}{24}$ rad

15. *a)* 10π rad *b)* $0{,}8\overline{3}$ s $\approx$ 0,83 s

Forum

a) 400 grades

b) 0.9°

c) $f(x) = \frac{10x}{9}$, où x est la mesure de l'angle en degrés et $f(x)$ est la mesure de l'angle en grades.

d) $g(x) = \frac{180x}{\pi} \Rightarrow f \circ g(x) = \frac{10}{9}\left(\frac{180x}{\pi}\right) = \frac{200\,x}{\pi}$, où x est la mesure de l'angle en radians et $(f \circ g)(x)$ est la mesure de l'angle en grades.

e) 1 km

page 232

La grande aiguille

a) 1) 120° 2) 270° 3) 270° 4) 450°

b) Pour 11:30.

c) Non, pour obtenir 11:00 et 13:00, la grande aiguille n'a pas subi la même rotation.

d) 1) -260° 2) 460°

e) 1) $-\frac{4\pi}{3}$ rad 2) $\frac{8\pi}{3}$ rad

page 233

Un cercle bien particulier

a) Le nombre de radians indiquant la mesure de l'angle au centre et la mesure de l'arc intercepté par les côtés de l'angle sans unités sont égaux. On a $L = \theta$.

page 234

b) 1) $\cos\theta$ 2) $\sin\theta$

c) $\tan\theta = \frac{\text{ordonnée de } P(\theta)}{\text{abscisse de } P(\theta)}$ ou $\frac{y}{x}$

d) $\text{cosec}\ \theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{y}$

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{x}$

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{x}{y}$

e)

Mesure d'arc	Quadrant	Signe de sin θ	Signe de cos θ	Signe de tan θ
$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$	1	+	+	+
$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$	2	+	-	-
$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$	3	-	-	+
$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$	4	-	+	-

page 235

f) $P\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$P\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$P\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$P(\pi) = (-1, 0)$

$P\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$P\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$P\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$P\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, -1)$

$P\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$P\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$P\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$P(2\pi) = (1, 0)$

g) 1) $\sin\theta$ 2) $-\sin\theta$ 3) $-\sin\theta$
4) $-\cos\theta$ 5) $-\cos\theta$ 6) $\cos\theta$

page 236

Un balancement régulier

a) *d* oscille entre 8 dm et 2 dm au fur et à mesure que le temps *t* augmente.
d diminue de 8 dm à 2 dm pour *t* compris entre 0 s et 2,5 s, entre 5 s et 7,5 s et entre 10 et 12,5 s.
d augmente de 2 dm à 8 dm pour *t* compris entre 2,5 s et 5 s et entre 7,5 s et 10 s.

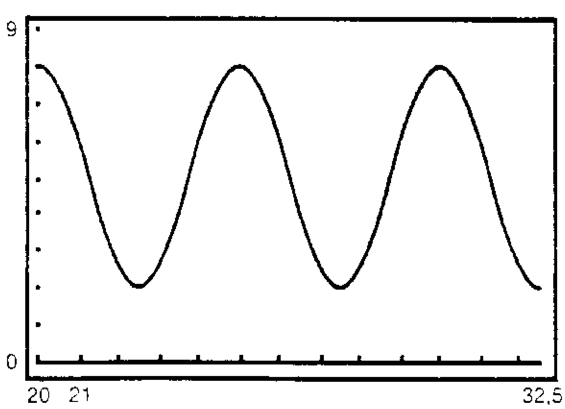
b) 1) 2 dm 2) 8 dm

c) 2 cycles.

d) 5 s

e) 0,2 cycle/s

f)



page 237

g) 1) 3 2) -4 3) 5,9271

page 238

Investissement 3

1. *a)* 1 *b)* 2 *c)* 2
d) 2 *e)* 1 *f)* 4

2. *a)* (0,309, -0,951) *b)* (-0,623, 0,782)
c) (0,540, 0,841)

3. *a)* (1, 0) *b)* (0, -1) *c)* (-1, 0)
d) (0, 1) *e)* (1, 0)

4. *a)* -90°, -270° *b)* 0°, 180°, -360°
c) -90°, -270° *d)* 0°, 180°, -360°

5. *a)* 0,841 *b)* -0,901 *c)* 0,364
d) -2,305 *e)* 1,236 *f)* 0,458

6. *a)* $A'\left(\frac{2}{5}, -\frac{\sqrt{21}}{5}\right)$, $B'\left(-\frac{7}{9}, -\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)$, $C'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,
$D'\left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$
b) $A'\left(-\frac{2}{5}, \frac{\sqrt{21}}{5}\right)$, $B'\left(\frac{7}{9}, \frac{4\sqrt{2}}{9}\right)$, $C'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,
$D'\left(-\frac{2}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$
c) $A'\left(-\frac{2}{5}, -\frac{\sqrt{21}}{5}\right)$, $B'\left(\frac{7}{9}, -\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)$, $C'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,
$D'\left(-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

7. *a)* + *b)* + *c)* + *d)* –
e) – *f)* + *g)* + *h)* –

page 239

8. *a)* $\frac{4}{5}$ *b)* $\frac{3}{5}$ *c)* $\frac{2\sqrt{6}}{5}$
d) $-\frac{7\sqrt{6}}{12}$ *e)* 6 *f)* $-\frac{\sqrt{35}}{35}$

9. *a)* $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *b)* (0, 1) *c)* $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

10. *a)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ *b)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ ou $-\frac{2\sqrt{6}}{5}$ *d)* $\frac{\sqrt{11}}{6}$ ou $-\frac{\sqrt{11}}{6}$
e) ≈ 0,667 ou ≈ -0,667
f) 1 ou -1

11. $\frac{3 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{4}$ ou $\frac{3 - 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{4}$

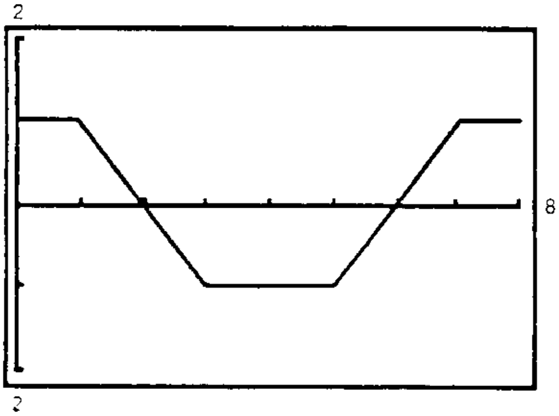
12. *a)* Faux. *b)* Vrai. *c)* Vrai. *d)* Vrai.

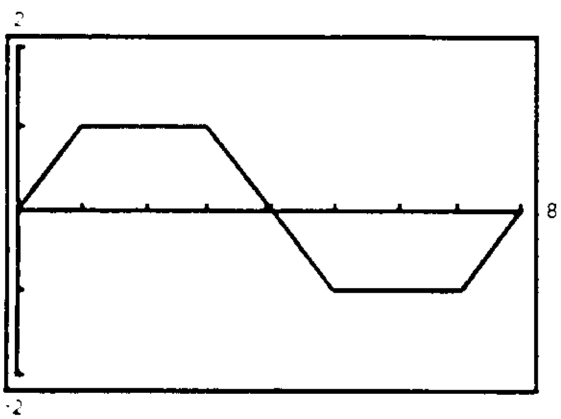
13. *a)* Oui, $p = 2$. *b)* Non.
c) Non. *d)* Oui, $p = 1{,}25$.

page 240

14. ***a)*** 1) (-1, -1) 2) (0,5, 1) 3) (1, 0) 4) (0,4, -1) 5) (1, -0,9)

b) 1) 2 2) 2



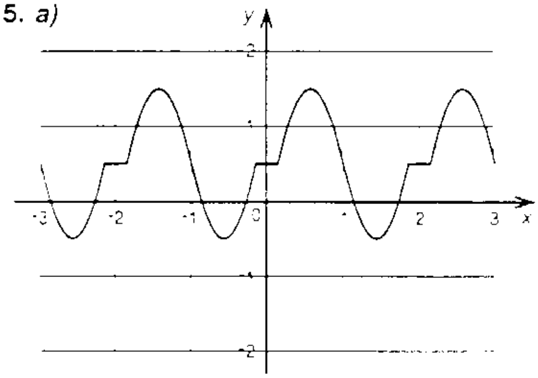


c) 1) $f : p = 8$ 2) dom f = IR 3) codom f : l'ensemble des points situés sur les côtés du carré.

$g : p = 8$ dom g = IR codom g = [-1, 1]

$h : p = 8$ dom h = IR codom h = [-1, 1]

15. *a)*



b) [-0,5, 1,5] ***c)*** 2 ***d)*** $\frac{1}{2}$

16. *a)* 0 ***b)*** 3 ***c)*** 0 ***d)*** 3

page 241

17. ***a)*** 900 cycles. ***b)*** 15 cycles/s

Forum

a) 1) 2θ rad 2) (2 cos θ, 2 sin θ)

b) (h − *r* cos *A*, k + *r* sin *A*)

c)

	Graphique	Table de valeurs
Avantages	• Il permet de reconnaître une fonction périodique d'un simple coup d'oeil. • Il montre le motif qui se répète et permet de déterminer la période.	• Elle donne des valeurs précises pour calculer la période lorsque la fonction est périodique.
Désavantages	• Il ne permet pas de reconnaître une fonction périodique si le graphique ne présente pas au moins un cycle complet.	• Elle est habituellement plus longue à analyser. • Elle peut ne pas donner suffisamment de valeurs. • Elle peut être trompeuse en montrant des mêmes valeurs du codomaine sans que la fonction soit périodique. (Ex. : la fonction quadratique.)

page 242

Les hauts et les bas d'un piston

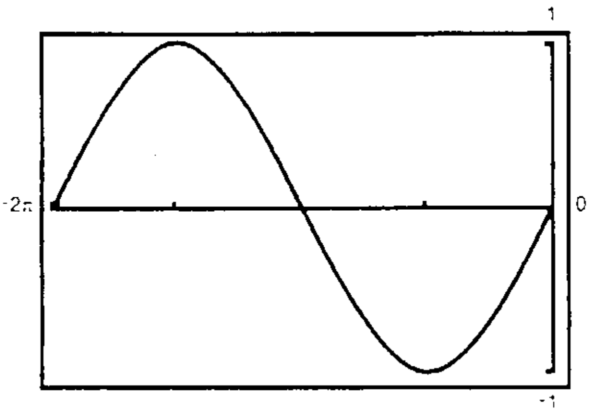
a) 1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) 1

4) $\frac{1}{2}$ 5) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 6) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $f(\theta) = y = \sin\theta$

c) Oui, car pour chaque mesure d'angle, on a une seule image.

d)



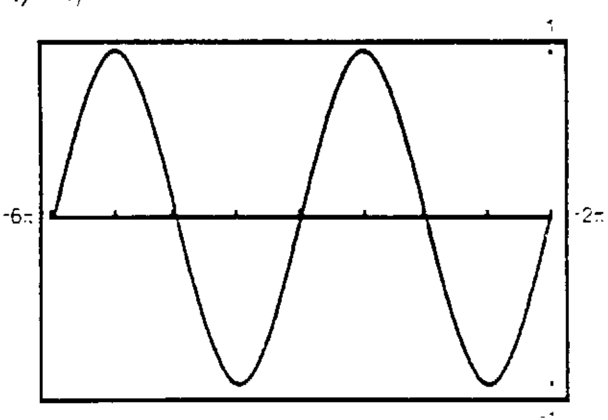
page 243

e) (Autres réponses possibles.)

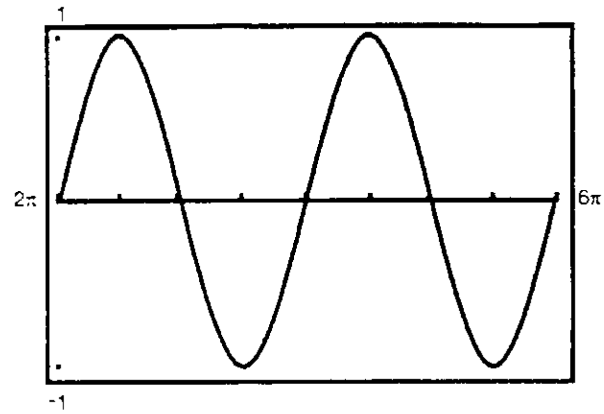
$f(-2\pi + 2\pi) = f(-2\pi) = 0$

$f\left(-\frac{3\pi}{2} + 2\pi\right) = f\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$

f) 1)



2)



g) 1) IR

2) 2π; $\frac{1}{2\pi}$

3) 1; -1

4) πn

6) $\left[x_{min} - \frac{\pi}{2}, x_{min} + \frac{\pi}{2}\right]$

7) π

8) $[x_{max}, x_{max} + \pi]$

page 244

h) 1

i) Non, car une valeur de la variable indépendante a plus d'une image.

Équinoxes et solstices

a) 1) ≈ 7,5 h 2) ≈ 9,4 h

3) ≈ 9,1 h

page 245

b) 1) 365 d 2) 16,5 h 3) 7,5 h 4) 4,5 h

c) a = 4,5

$b = \frac{2\pi}{365}$

h = 91,25

k = 12

d) $A = |a|$

e) $p = \frac{2\pi}{|b|}$

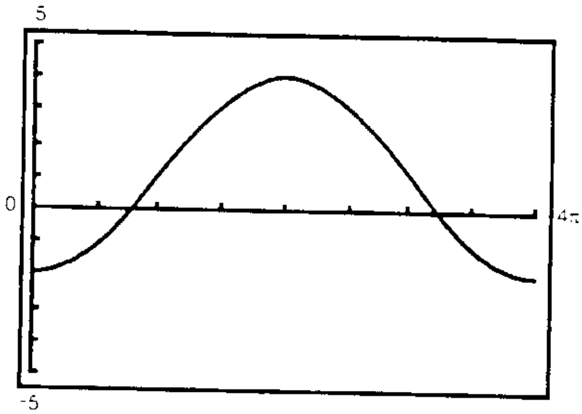
(b = nombre de cycles sur 2π)

page 246

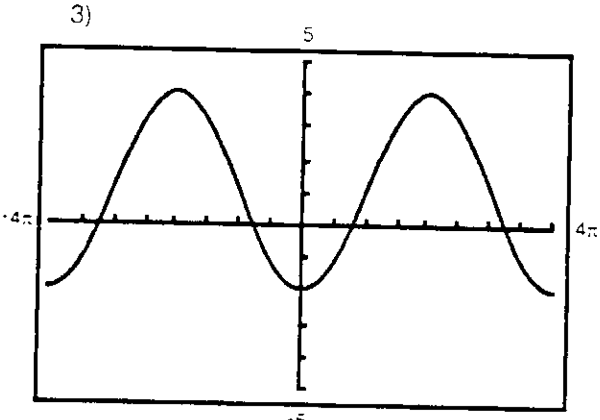
f) 1) Le paramètre a.
2) Le paramètre b.
3) Les paramètres a et k.
4) Les paramètres a, b et h.

g) 1) $A = 3$
$p = 4\pi$

2)



3)



4) Croissance : sur $[-4\pi, -2\pi]$ et sur $[0, 2\pi]$.

Décroissance : sur $[-2\pi, 0]$ et sur $[2\pi, 4\pi]$.

5) Codom $f = [-2, 4]$

h) IR

page 247

Vitesse du courant

a) Hors de l'eau, car l'ordonnée moyenne (k) de la fonction h est supérieure à zéro.

b) 2 s

c) 4 fois.

d) $\theta_1 \approx 0{,}3398$ et $\theta_2 \approx 2{,}8018$, car il existe deux points dans le cercle trigonométrique qui ont la même ordonnée.

e) Sur le cercle trigonométrique, les ordonnées de $P(\theta_1)$ et de $P(\pi - \theta_1)$ sont égales.

page 248

f) 1) $t_3 = t_1 +$ période $\approx 0{,}3582 + 2 \approx 2{,}3582$ s
$t_5 = t_1 + 2$ périodes $\approx 0{,}3582 + 4 \approx 4{,}3582$ s

2) $t_4 = t_2 +$ période $\approx 1{,}1418 + 2 \approx 3{,}1418$ s
$t_6 = t_2 + 2$ périodes $\approx 1{,}1418 + 4 \approx 5{,}1418$ s

g) 1) $2n$
2) $2n$, IN

h) 1) [0, 0,36] U [1,14, 2,36] U [3,14, 4]
2) [0,36, 1,14] [2,36, 3,14]
3) [0,75, 1,75] [2,75, 3,75]
4) [0, 0,75] U [1,75, 2,75] U [3,75, 4]

page 251

La valse de la mer

a) En effectuant la demi-différence de la hauteur maximale et de la hauteur minimale de la marée.

b) 12 h

c) 16 m

d) Le paramètre k.

e) 2:00

f) (Autres réponses possibles.)
$f(x) = 6 \sin \frac{\pi}{6}(x - 2) + 16$

g) (Autres réponses possibles.)
$g(x) = -2{,}5 \sin \frac{\pi}{6}(x - 1) + 4{,}5$

page 252

h) ① Dans le menu « statistique », éditer dans deux listes les données de la table de valeurs.

② Calculer l'équation de régression.

③ Éditer cette fonction et faire apparaître le graphique.

page 253

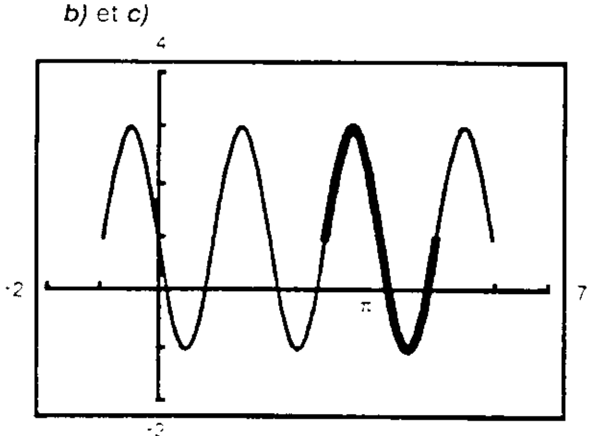
Investissement 4

1. min : -1 max : 1
2. *a)* 5

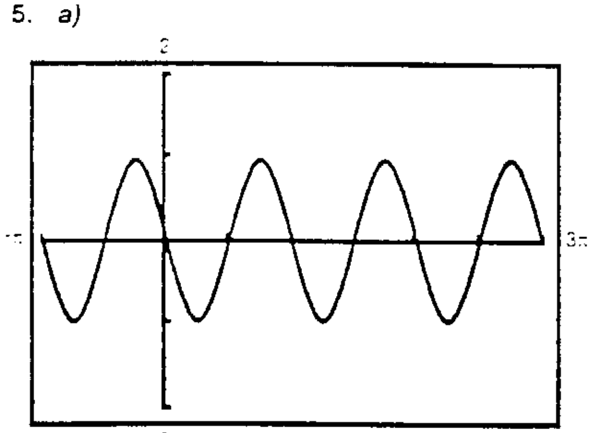
   b) $\left[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

   c) $[-\pi, 0] \cup [\pi, 2\pi]$
3. *a)* Vraie. *b)* Fausse. *c)* Vraie.
4. *a)* $p = 2$ $A = 2$

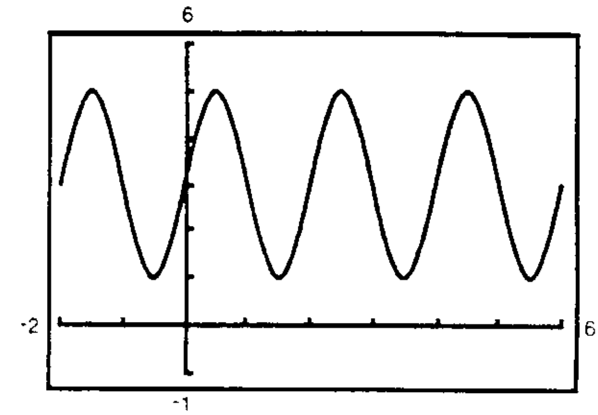
   b) et *c)*



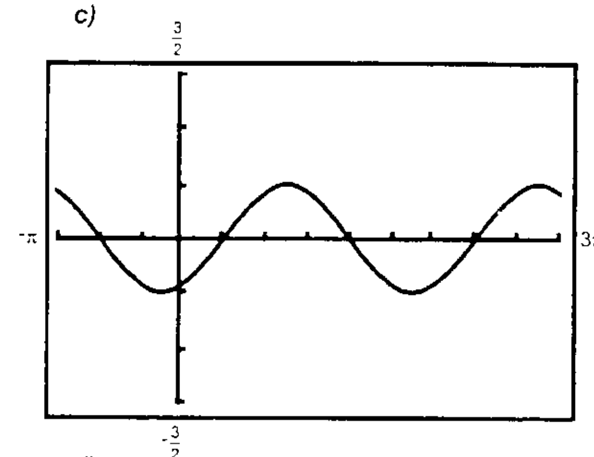
5. *a)*



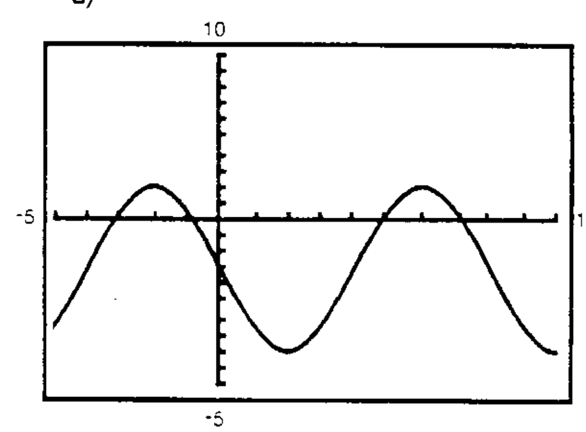
b)



c)



d)



6.

		f	g	h
a)	Période	2π	$\frac{2}{3}$	4π
b)	Amplitude	4	1	10
c)	Minimum	-4	1	-15
d)	Maximum	4	3	5

page 254

7. Les fonctions f et g ont le même graphique.

8. $2n,\ n \in \mathbb{Z}$

9.

		f	g
a)	Amplitude	2,5	12
b)	Période	π	π
c)	Zéros	$\left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$	$\{-\pi, 0, \pi, 2\pi\}$
d)	Positive sur	$\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$	$\{-\pi, 0, \pi, 2\pi\}$
	Négative sur	$\left[-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$	$[-\pi, 2\pi]$
e)	Décroissante sur	$\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right], \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$	$\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right], \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

10. *a)* $f_1(2\pi) = 0$
$f_2(2\pi) = 0$
$f_3(2\pi) \approx 0{,}7568$
$f_4(2\pi) = 4$

b) $f_1(0) = 0$
$f_2(0) = 0$
$f_3(0) \approx 0{,}7568$
$f_4(0) = 4$

c) $f_1 : x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
$f_2 : x = \frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbb{Z}$
$f_3 : x = 4 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
f_4 : aucune

d) dom $f_1 = \mathbb{R}$; codom $f_1 = [-4, 4]$
dom $f_2 = \mathbb{R}$; codom $f_2 = [-1, 1]$
dom $f_3 = \mathbb{R}$; codom $f_3 = [-1, 1]$
dom $f_4 = \mathbb{R}$; codom $f_4 = [3, 5]$

11. *a)* $x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
$x_2 = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

b) $x_1 = \frac{5\pi}{8} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
$x_2 = \frac{2\pi}{8} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

c) $x_1 \approx 0{,}5 + 2n,\ n \in \mathbb{Z}$

d) Aucun.

12. *a)* π

b) 2

c) $t_{(-1,\ \pi)}$

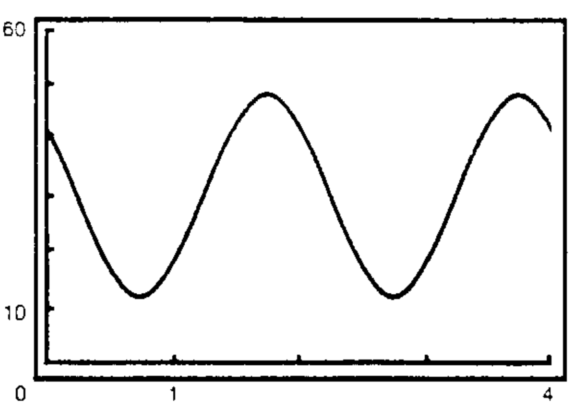
d) min : 0
max : 2π

page 255

13. *a)* 1 s

b) Après 0,75 s.

c)



d) 1) 2 s   2) [12, 48]

e) À 12 cm.

14. $|k| > |a|$

15. *a)* Y_1 : $x_1 \approx 0{,}73 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
$x_2 \approx 2{,}41 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Y_2 : $x_1 \approx -0{,}20 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$
$x_2 \approx 3{,}34 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Y_3 : aucun.

Y_4 : $x_1 = \frac{\pi^2}{6} + 2\pi^2 n,\ n \in \mathbb{Z}$
$x_2 = \frac{5\pi^2}{6} + 2\pi^2 n,\ n \in \mathbb{Z}$

b)

	$Y \geq 0$	$Y \leq 0$
Y_1	$[\approx 2{,}4119 + 2\pi n, \approx 7{,}01 + 2\pi]$	$[\approx 0{,}73 + 2\pi n, \approx 2{,}41 + 2\pi n]$
Y_2	$[\approx -0{,}20 + 2\pi n, 3{,}34 + 2\pi n]$	$[\approx 3{,}34 + 2\pi n, \approx 6{,}08 + 2\pi n]$
Y_3	——	$\mathbb{R}$
Y_4	$\left[\frac{\pi^2}{6} + 2\pi^2 n, \frac{5\pi^2}{6} + 2\pi^2 n\right]$	$\left[\frac{5\pi^2}{6} + 2\pi^2 n, \frac{17\pi^2}{6} + 2\pi^2 n\right]$

$n \in \mathbb{Z}$

16. *a)* Puisque les trois points correspondent à trois extremums consécutifs, alors $c - a = e - c = \frac{p}{2}$.

b) $A = \frac{|f - d|}{2} = \frac{|d - b|}{2}$

$f = \frac{1}{e - a}$

c) Non, elle est décroissante.

17. *a)* 2 fois.

b) $\frac{\pi}{18}$ s $\approx 0{,}1745$ s ou $\frac{\pi}{9}$ s $\approx 0{,}3491$ s

page 256

18. *a)* $f(x) = 4 \sin \pi (x - 0{,}5) - 1$

b) $f(x) = -\sin \frac{\pi}{2}(x - 1) + 3$

19. *a)* $y = 2 \sin 2x$

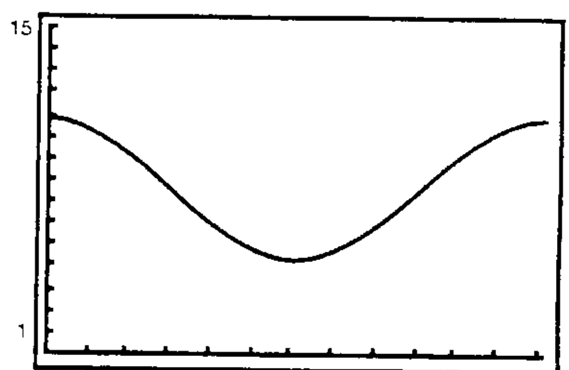
b) $y = 0{,}5 \sin \frac{4}{3} x - 1$

c) $y = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$

d) $y = 3 \sin \frac{\pi}{6}(x + 2) + 2$

20. *a)* $j(n) = 3{,}25 \sin \frac{2\pi}{365} (x + 91{,}25) + 7{,}5$

b)



21. *a)* $y = 20 \sin 2\pi(x - 0{,}25) + 60$;
x : temps en heures.

b) $y = 8 \sin \frac{\pi}{6}(x - 3) + 60$;
x : temps en heures.

page 257

22. *a)* (Autres réponses possibles.)
$f(x) = 16 \sin \frac{\pi}{6} (x - 4) + 11$

b) $\approx 24{,}9°$

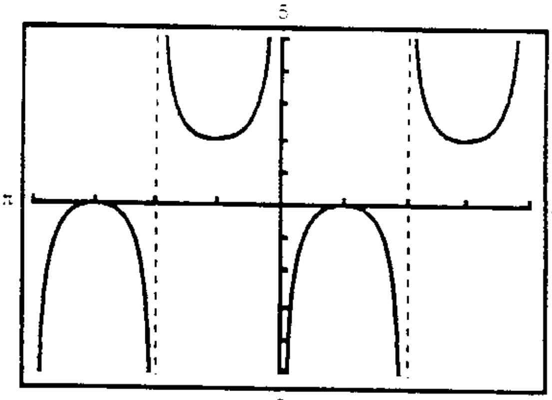
23. *a)* Oui. *b)* Oui. *c)* Oui.
d) Oui. *e)* Oui. *f)* Oui.

24. *a)* 2π

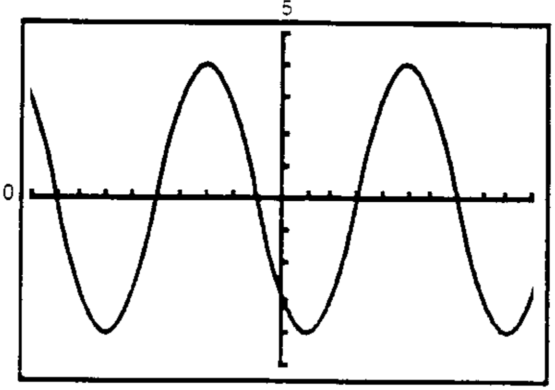
b) Dom $f = \mathbb{R} \setminus \{\pi n \mid n \in \mathbb{Z}\}$
Codom $f = \mathbb{R} \setminus]-1, 1[$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$

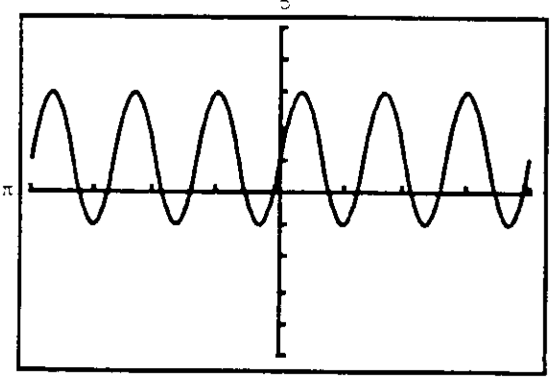
d)



25. *a)* Dom $f = \mathbb{R}$
Codom $f = [-4, 4]$
Période = 8
Amplitude = 4
Zéros : $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 3 + 4n, n \in \mathbb{Z}\}$
$f(x) \geq 0 : x \in [3 + 8n, 7 + 8n]$, où $n \in \mathbb{Z}$
$f(x) \leq 0 : x \in [-1 + 8n, 3 + 8n]$, où $n \in \mathbb{Z}$
Croissante sur $[1 + 8n, 5 + 8n]$, où $n \in \mathbb{Z}$
Décroissante sur $[5 + 8n, 9 + 8n]$, où $n \in \mathbb{Z}$



b) Dom $g = \mathbb{R}$
Codom $g = [-1, 3]$
$p = \frac{2\pi}{3}$
$A = 2$
Zéros : $\frac{7\pi}{18} + \left(\frac{2\pi}{3}\right) \bullet n$ et $\frac{11\pi}{18} + \left(\frac{2\pi}{3}\right) \bullet n$, où $n \in \mathbb{Z}$
$g(x) \geq 0 : \left[-\frac{\pi}{18} + \left(\frac{2\pi}{3}\right) \bullet n, \frac{7\pi}{18} + \left(\frac{2\pi}{3}\right) \bullet n\right]$, où $n \in \mathbb{Z}$
$g(x) \leq 0 : \left[\frac{7\pi}{18} + \left(\frac{2\pi}{3}\right) \bullet n, \frac{11\pi}{18} + \left(\frac{2\pi}{3}\right) \bullet n\right]$, où $n \in \mathbb{Z}$
Croissante sur $\left[-\frac{\pi}{6} + \left(\frac{2\pi}{3}\right) \bullet n, \frac{\pi}{6} + \left(\frac{2\pi}{3}\right) \bullet n\right]$, où $n \in \mathbb{Z}$
Décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6} + \left(\frac{2\pi}{3}\right) \bullet n, \frac{\pi}{2} + \left(\frac{2\pi}{3}\right) \bullet n\right]$, où $n \in \mathbb{Z}$



Forum

(Autres réponses possibles.)

$\approx -3{,}09$, $\approx 3{,}09$, $\approx 6{,}39$

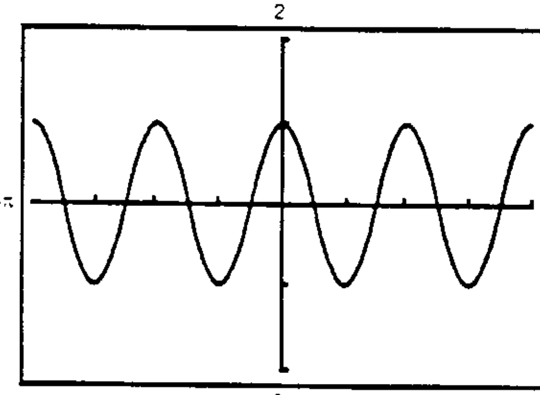
page 258

Deux fonctions et une seule courbe

a) $f(\theta) = \cos\theta$

b) Il a la même allure que sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

c)



d) Les sinusoïdes sont superposées et les tables de valeurs sont identiques.

page 259

e) 1) IR; [-1, 1]

2) 2π; $\frac{1}{2\pi}$

3) -1 ; 1 ; 1

4) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$

5) $\frac{\pi}{2}$

6) $\left[x_{min} - \frac{\pi}{2}, x_{min} + \frac{\pi}{2}\right]$

7) π

8) $[x_{max}, x_{max} + \pi]$

f) Domaine, codomaine, période, fréquence, amplitude, minimum et maximum.

g) Non, car il existe une valeur de x qui a plus d'une image.

La respiration

a) Inspiration : fonction croissante.

Expiration : fonction décroissante.

page 260

b) a = 0,3

b = $\frac{\pi}{2}$

h = -1

k = 2,8

c) 1) a

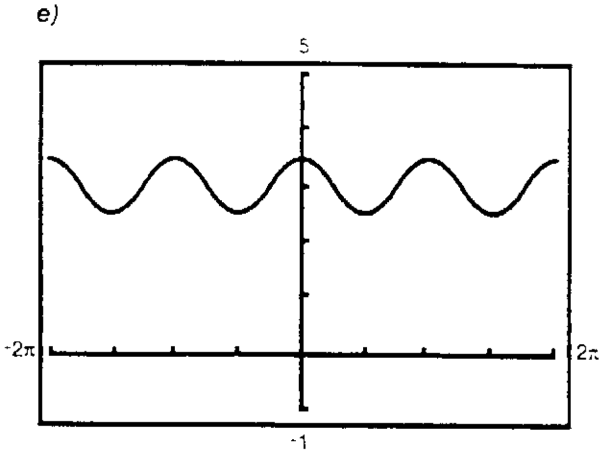
2) b

3) a et k

4) a, b et h

d) 1) 4 2) 3,1 3) 2,5 4) 0,3

e)



page 261

f) Deux, car dans les 1^er et 4^e quadrants, deux points ont la même abscisse 0,5 : $\left(0{,}5, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\left(0{,}5, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

g) Dans le cercle trigonométrique, les arcs θ et $-\theta$ sont symétriques par rapport à l'axe des x et es abscisses sont donc égales.

h) 2π

i) 2π; 2π; $\mathbb{Z}$

j) $f(x) \geq 0 : \left[-\frac{(\pi + 9)}{3} + 2\pi n, \frac{(\pi - 9)}{3} + 2\pi n\right]$, où $n \in \mathbb{Z}$

$f(x) \leq 0 : \left[\frac{(\pi - 9)}{3} + 2\pi n, \frac{(5\pi - 9)}{3} + 2\pi n\right]$, où $n \in \mathbb{Z}$

page 263

Investissement 5

1. (Autres réponses possibles.)

$(0, 1)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$, $(\pi, -1)$

2. *a)* $-\frac{7\pi}{2}$

b) Décroissante sur $[-2\pi, -\pi]$ et sur $[0, \pi]$.
Croissante sur $[-\pi, 0]$ et sur $[\pi, 2\pi]$.

c) $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right]$

3. -1 et 1

4. *a)*

	a	b	h	k
f_1 :	-1	2	0	-7
f_2 :	1	π	1	0
f_3 :	2	1	$\frac{\pi}{2}$	4

b) f_1 : Réflexion par rapport à l'axe des x suivie d'un changement d'échelle horizontal de facteur $\frac{1}{2}$ suivi d'une translation verticale de 7 unités vers le bas.

f_2 : Changement d'échelle horizontal de facteur $\frac{1}{\pi}$ suivi d'une translation horizontale d'une unité vers la droite.

page 265

12. (Autres réponses possibles.)
$g(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

13. ***a)*** Valeur initiale : f_1 : -1
f_2 : $\approx$ 1,5403
f_3 : 3

b) Zéros : $f_1 : x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$
$x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$
$f_2 : x = \pi + 1 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
f_3 : —

c) Variation : f_1 : croissante sur $\left[0 + \frac{2\pi n}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}\right], n \in \mathbb{Z}$
décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}\right], n \in \mathbb{Z}$
f_2 : croissante sur $[-\pi + 1 + 2\pi n, 1 + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$
décroissante sur $[1 + 2\pi n, \pi + 1 + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$
f_3 : croissante sur $[\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$
décroissante sur $[0 + 2\pi n, \pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$

d) Signe : f_1 : $f(x) \geq 0 : \left[\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}\right], n \in \mathbb{Z}$
$f(x) \leq 0 : \left[\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}, \frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}\right], n \in \mathbb{Z}$
f_2 : $f(x) \geq 0 : \mathbb{R}$
$f(x) \leq 0 : \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + 1 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}\}$
f_3 : $f(x) \geq 0 : \mathbb{R}$

14. ***a)*** $A = 4{,}5$
$p = 2$ s

b) 0,5 s, 1,5 s, 2,5 s, 3,5 s, 4,5 s, 5,5 s, 6,5
7,5 s, 8,5 s et 9,5 s

c) 1) $[0 + 2n, 1 + 2n]$, où $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$
2) $[0, 0{,}5] \cup [9{,}5, 10] \cup [1{,}5 + 2n, 2{,}5 + 2$
où $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

15. ***a)*** 2π

b) Dom $f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$
Codom $f = \mathbb{R} \setminus]-1, 1[$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$

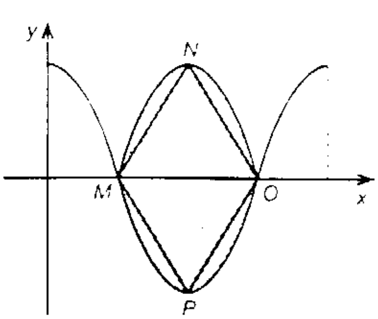
d) $\frac{\pi}{2}$

page 266

Forum

a) 0, n, $n - 1$, $2n$ ou $2n + 1$ zéros.

b)



Aire du lozange $MNOP$ $= \frac{m\,\overline{MO} \cdot m\,\overline{NP}}{2}$
$= \frac{\frac{p}{2} \times 2A}{2}$
$= \frac{pA}{2}$, où $p = \frac{2\pi}{b}$
et $A = |a|$

d'où Aire ◊ $= \frac{\pi a}{b}$, car $a > 0$, $b > 0$.

Aire région colorée > Aire ◊
Aire région colorée > $\frac{\pi a}{b}$

L'ancêtre du chronomètre

a) 1) $\approx$ 0,36 m 2) 1 m 3) $\approx$ 3,08 m 4) 0 m

b) $f(x) = \tan x$

page 267

c) 1) π

2) $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$

3) Aucun.

4) $\mathbb{R}$

d) 1) $\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = f(x)$

$$= \frac{\frac{\text{cathète opposée à l'angle } x}{\text{hypoténuse}}}{\frac{\text{cathète adjacente à l'angle } x}{\text{hypoténuse}}}$$

$$= \frac{\text{cathète opposée à l'angle } x}{\text{cathète adjacente à l'angle } x}$$

$$= \tan x$$

$$= f(x)$$

2) Oui. Si α est un zéro de la fonction g, alors $f(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0}{\cos \alpha} = 0$.

3) Oui. Si β est un zéro de la fonction h, alors $f(b) = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \beta}{0}$ = impossibilité.

On doit exclure du domaine de f les zéros de la fonction h.

e) (Autres réponses possibles.)

$\left(-\frac{\pi}{4}, -1\right), (0, 0), \left(\frac{\pi}{4}, 1\right), \left(\frac{3\pi}{4}, -1\right), (\pi, 0)$

f) 1) $p = \pi$

2) Croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right[$

3) $f(x) \geq 0$ sur $\left[0 + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right[, n \in \mathbb{Z}$

$f(x) \leq 0$ sur $\left]\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi + \pi n\right], n \in \mathbb{Z}$

4) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

page 268

g) 1) Le paramètre b.

2) Les paramètres a et b.

3) Les paramètres b et h.

4) Les paramètres b et h.

5) Les paramètres b et h.

h) 1) $\frac{\pi}{2}$

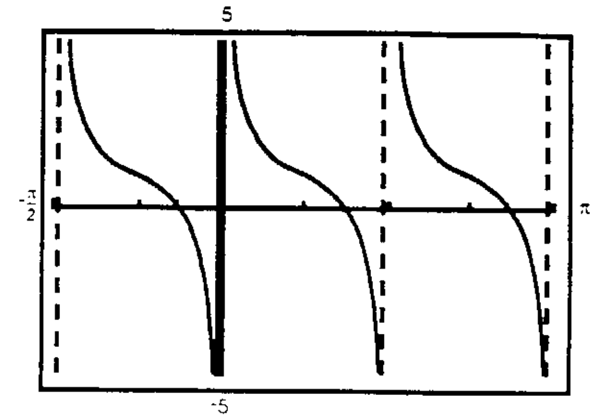
2) $x = \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

3) $\left(-\frac{\pi}{4}, -1\right) \rightarrow \left(\frac{\pi}{8}, 2\right)$

$(0, 0) \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) \rightarrow \left(\frac{3\pi}{8}, 2\right)$

4)



5) Dom $f = \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

Codom $f = \mathbb{R}$

6) Décroissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$, $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

i) $\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

$x = \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$

page 269

j) 1) $x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$

2) $x \approx -3{,}10 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

k) Non, toutes les valeurs de x ont plus d'une image.

Investissement 6

1. *a)* 4 asymptotes.

b) 5 zéros.

c) $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$

d) $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

2. $\{\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi\}$

page 270

3. *a)* Vrai. *b)* Faux. *c)* Faux. *d)* Faux.

4. *a)* $Y_1 : \pi$ $Y_2 : \frac{\pi}{2}$ $Y_3 : \pi$ $Y_4 : \pi$

b) $Y_1 : \{-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi\}$

$Y_2 : \{-2\pi, -\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$

$Y_3 : \{-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$

$Y_4 : \{-\frac{7\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$

c) $Y_1 : x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$Y_2 : x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \mathbb{Z}$

$Y_3 : x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$Y_4 : x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

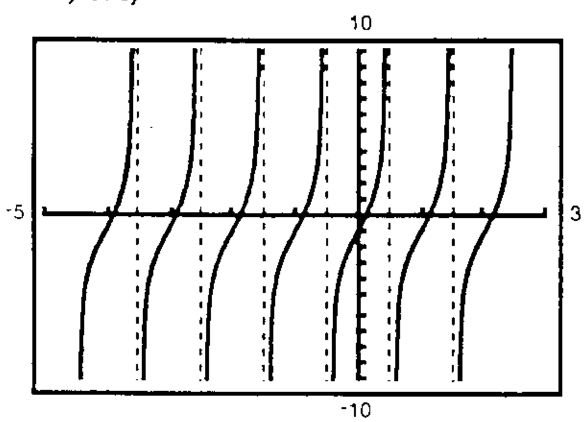
5. *a)* $p = 1$

b) $\left(-\frac{\pi}{4}, -1\right) \rightarrow \left(-\frac{5}{4}, -3\right)$

$(0, 0) \rightarrow (-1, -1)$

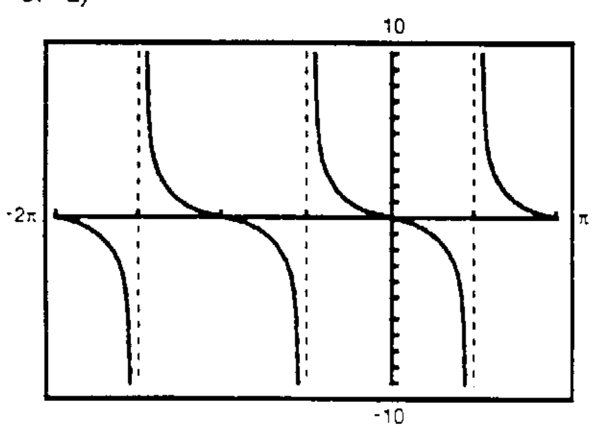
$\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) \rightarrow \left(-\frac{3}{4}, 1\right)$

c) et *e)*

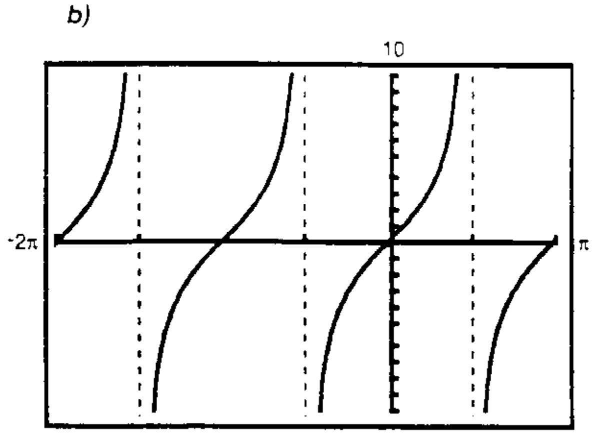


d) $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{2} + n,\ n \in \mathbb{Z}\}$

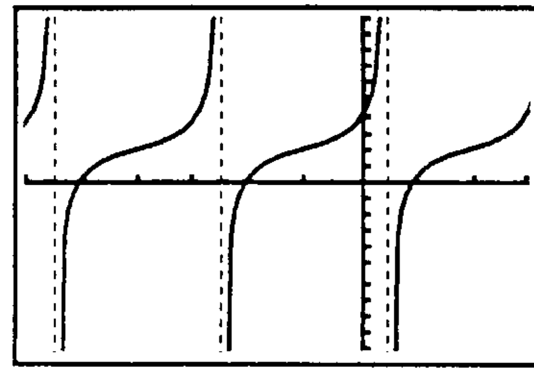
6. *a)*



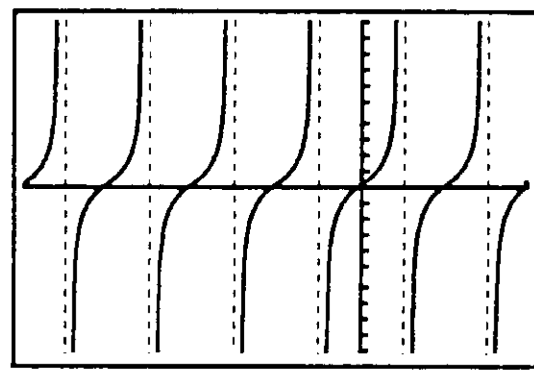
b)



c)



d)



7. *a)* $x \approx 0{,}9828 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

b) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

8. *a)* $\left[2 - \frac{3\sqrt{3}}{5}, 2 + \frac{3\sqrt{3}}{5}\right]$

b) $\mathbb{R}$

9. *a)* $f_1 : \sqrt{3}$

$f_2 : 0$

$f_3 : \approx -1{,}56$

b) $f_1 : \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\}$

$f_2 : \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}\}$

$f_3 : \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\}$

c) f_1 : décroissante sur $\left]-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right[$, $n \in \mathbb{Z}$

f_2 : croissante sur $\left]-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}\right[$, $n \in \mathbb{Z}$

f_3 : croissante sur $\left]\frac{2 - \pi}{2} + \pi n, \frac{2 + \pi}{2} + \pi n\right[$, $n \in \mathbb{Z}$

d) f_1 : $f(x) \geq 0 : \left]-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{6} + \pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$

$f(x) \leq 0 : \left[\frac{\pi}{6} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right[$, $n \in \mathbb{Z}$

$f_2 : f(x) \geq 0 : \left[\frac{\pi n}{3}, \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}\right[, n \in \mathbb{Z}$

$f(x) \leq 0 : \left]-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \frac{\pi n}{3}\right], n \in \mathbb{Z}$

$f_3 : f(x) \geq 0 : \left[1 + \pi n, \frac{(\pi + 2)}{2} + \pi n\right[, n \in \mathbb{Z}$

$f(x) \leq 0 : \left]\frac{(-\pi + 2)}{2} + \pi n, 1 + \pi n\right], n \in \mathbb{Z}$

page 271

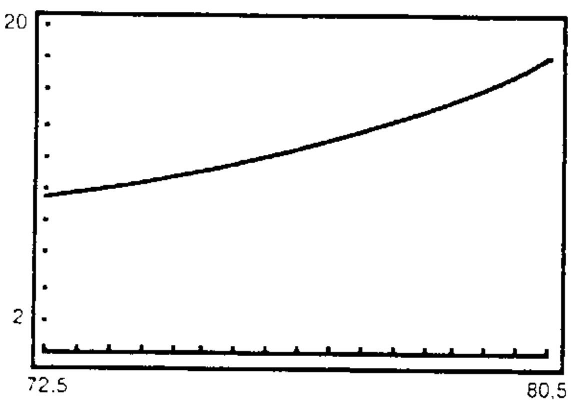
10. *a)* $\approx$ 9,54 m

b) $\approx$ 17,75 m

c) 1) $\approx$ 72,5° 2) $\approx$ 80,41°

d) $g(\theta) = 3 \tan \theta$

e)



11. *a)* π

b) Dom $f = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$

Codom $f = \mathbb{R}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$

d) a = -1

$h = \frac{\pi}{2}$

Forum

a) 1) Puisque $a \tan b(x - h) = a \frac{\sin b(x - h)}{\cos b(x - h)}$ est défini pour toutes les valeurs de x sauf celles où $\cos b(x - h) = 0$, il suffit de résoudre cette dernière équation pour déterminer les équations des asymptotes de la fonction f.

2) Puisque $a \tan b(x - h) = a \frac{\sin b(x - h)}{\cos b(x - h)}$ et que ce rapport est nul, si $\sin b(x - h) = 0$, alors il suffit de résoudre cette équation pour déterminer les zéros de la fonction f.

3) 1) Oui, pour les asymptotes, la modification du paramètre k n'influence pas les valeurs pour lesquelles la fonction n'est pas définie.

2) Non, pour les zéros :

$a \tan b(x - h) + k = 0$

$\tan b(x - h) = -\frac{k}{a}$

$b(x - h) = \tan^{-1}\left(-\frac{k}{a}\right)$

$(x - h) = \left(\frac{1}{b}\right) \tan^{-1}\left(-\frac{k}{a}\right)$

$x = \left(\frac{1}{b}\right) \tan^{-1}\left(-\frac{k}{a}\right) + h$

b) 1) $b_1 = b_2$, $k_1 = k_2$ et $h_1 = h_2 + \frac{\pi}{b_2} n, n \in \mathbb{Z}$

2) $b_1 = b_2$ et $h_1 = h_2 + \frac{\pi}{b_2} n, n \in \mathbb{Z}$

page 272

a) $\approx$ 39,9°

b) Non, car l'angle *A* appartient à un triangle rectangle dont deux des mesures sont fixes.

c) Non.

d) $\approx$ 140,1°, $\approx$ -219,9°, $\approx$ -320,1°, ...

page 273

e) Des valeurs de la variable indépendante ont plus d'une image.

page 274

f) 1) $\approx$ 0,60 rad

2) $\approx$ -0,24 rad

3) $\approx$ 0,83 rad

4) Non définie, $3 \notin [-1, 1]$

g) 1) x 2) x

page 275

Fonction arccos

a) 1) 1,07 rad 2) 1,91 rad

3) 0,86 rad 4) Non définie.

b) 1) $0 \leq x \leq \pi$ 2) $-1 \leq x \leq 1$

Fonction arctan

a) Non.

b) Non.

c) C'est une fonction.

d) Quadrants 1 et 4.

e) $y = -\frac{\pi}{2}$ et $y = \frac{\pi}{2}$

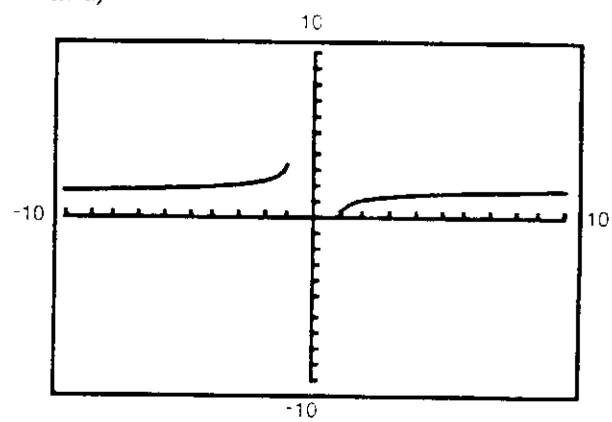
page 276

Investissement 7

1. *a)* $\frac{\pi}{3}$ *b)* π *c)* $\frac{\pi}{6}$ *d)* 1
   e) $\frac{\pi}{2}$ *f)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$ *g)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$ *h)* $\frac{4}{5}$
2. *a)* $\approx 0{,}5742$ *b)* $\approx -1{,}28$
   c) $\approx 0{,}7886$ *d)* Impossible.
   e) $\approx 0{,}1563$ *f)* $-0{,}2311$
   g) $\approx -2{,}3116$ *h)* $0{,}3211$
   i) $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}5708$
3. *a)* Quadrants 1 et 4.
   b) Quadrants 1 et 2.
   c) Quadrants 1 et 4.
4. *a)* $[-1, 1]$ *b)* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
   c) Positive : $[0, 1]$
   Négative : $[-1, 0]$
   d) Croissante sur $[-1, 1]$.
   e) $-\frac{\pi}{2}$ *f)* $\frac{\pi}{2}$
5. *a)* – *b)* – *c)* +
6. *a)* $\frac{1}{2}$ *b)* $\approx 1{,}0708$
   c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ *d)* $\frac{4}{3}$
7. *a)* $\approx \pm 0{,}7563$ *b)* $\approx \pm 0{,}9924$
   c) $\approx \pm 0{,}8987$ *d)* $\approx \pm 0{,}8358$
8. Non, car les valeurs négatives de cosinus seraient omises et de plus, ce ne serait pas une fonction.

page 277

9. *a)* $t \approx -0{,}66$
   b) $(\approx 0{,}7880, \approx -0{,}6157)$
   c) $s \approx 2{,}48$
10. *a)* $\frac{3}{2}$ *b)* 2 *c)* $\frac{6 - \sqrt{3}}{6}$
11. *a)* $\approx 43{,}0°$
    b) $(\approx 0{,}7314, 0{,}682)$, $(\approx 0{,}7314, -0{,}682)$, $(\approx -0{,}7314, 0{,}682)$ et $(\approx -0{,}7314, -0{,}682)$
12. *a)*

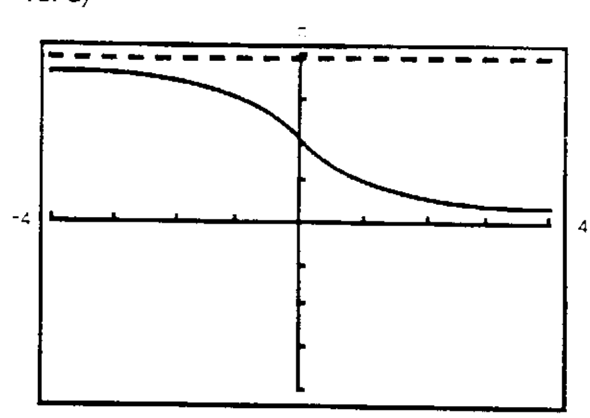


b) dom $f = \mathbb{R} \setminus]-1, 1[$; codom $f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$
asymptote de f : $y = 0$
dom $g = \mathbb{R} \setminus]-1, 1[$; codom $g = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}\right.$
asymptote de g : $y = \frac{\pi}{2}$

c) 1) $\approx 0{,}34$ 2) $\approx 1{,}87$
3) $\approx -0{,}04$ 4) Non définie.

page 278

13. *a)*

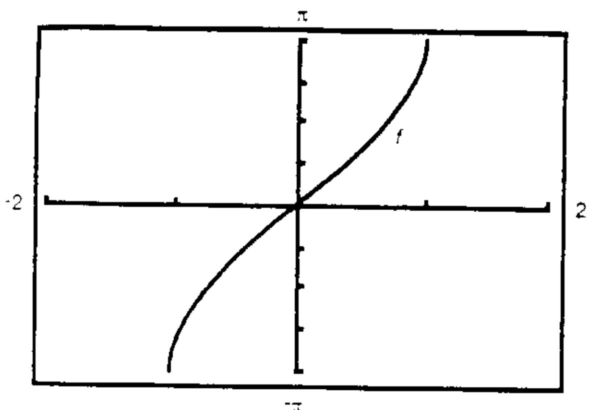


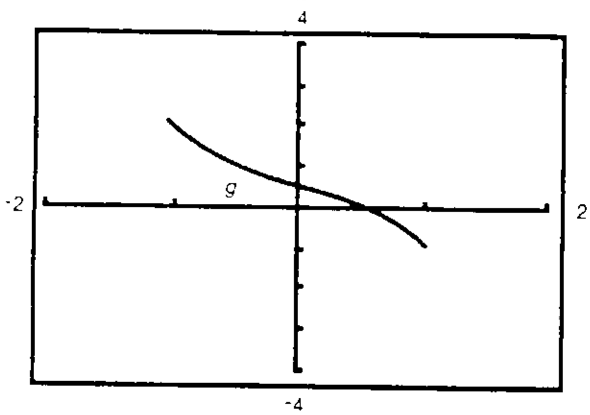
b) Dom $f^{-1} = \mathbb{R}$

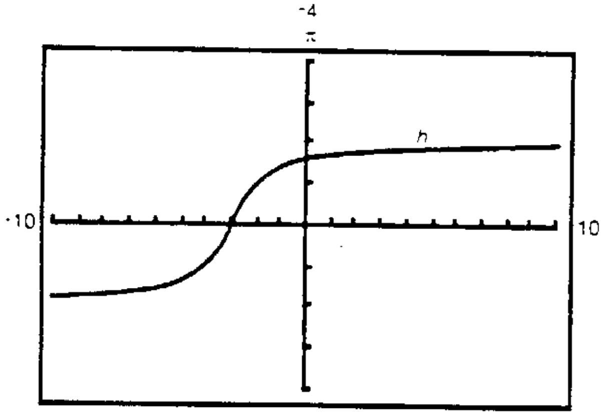
Codom $f^{-1} =]0, \pi[$

14. $\approx$ 1 243 km ($\approx$ 540,4 km + $\approx$ 702,6 km)

15. *a)*







b) dom $f = [-1, 1]$

dom $g = [-1, 1]$

dom $h = \mathbb{R}$

c) codom $f = [-\pi, \pi]$

codom $g = [-1, \pi - 1]$

codom $h = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

page 279

Forum

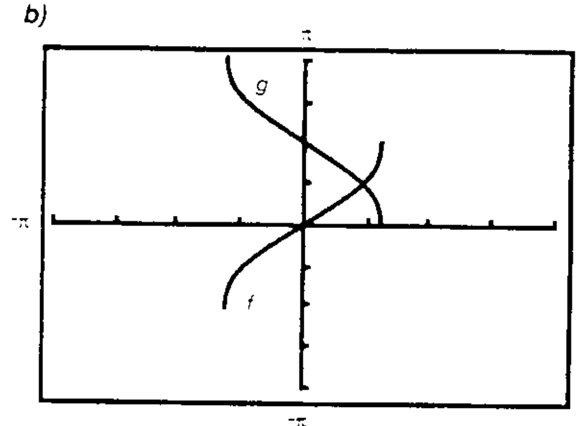
a) Non.

Contre-exemple :

$$\begin{aligned} g(0{,}5 + 0{,}5) &= g(1) \\ &= \arcsin 1 \\ &= \frac{\pi}{2} \\ g(0{,}5) + g(0{,}5) &= \arcsin 0{,}5 + \arcsin 0{,}5 \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Donc, $g(0{,}5) + g(0{,}5) \neq g(0{,}5 + 0{,}5)$.

b)



Oui, une réflexion de l'une des courbes par rapport à la droite d'équation $y = \frac{\pi}{4}$.

c) $h(x) = 2 \arcsin (x - 1) + \pi$

$i(x) = 2 \arcsin (-x + 3) + \pi$

$j(x) = 2 \arcsin (x - 5) + \pi$

$k(x) = 2 \arcsin (-x + 7) + \pi$

d) Soit $y = \arcsin x$

$\Rightarrow \sin y = x$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = x$

$\Rightarrow \arccos x = \frac{\pi}{2} - y$

$\Rightarrow \arcsin x + \arccos x = y + \frac{\pi}{2} - y$

$= \frac{\pi}{2}$

e) Ces deux expressions ne sont pas équivalentes, car le domaine de arctan x est $\mathbb{R}$ et le domaine arcsin et de arccos est $[-1, 1]$.

page 280

Des identités de base

a) m $\overline{CG}$

b) m $\overline{OC}$

page 281

c) À cause de la propriété AA.

d) $\tan\theta$

e) $\frac{m\ \overline{OF}}{1} = \frac{1}{\cos\theta}$; $\sec\theta$

f) $\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

g) AA

h) $\text{cosec}\ \theta$

i) $\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$

$1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\ \theta$

page 282

j) 1) La 1re démarche consiste à comparer les graphiques des fonctions associées à chaque membre et on constate leur correspondance.

2) La 2e démarche consiste à tracer le graphique de chacune des fonctions impliquées dans le membre de gauche et à effectuer la somme de ces fonctions. Le graphique de la somme permet de donner la règle de la fonction somme.

k) (Travail à la calculatrice.)

page 284

Investissement 8

1. *a)* $\sin^2 x$ *b)* 1 *c)* $\sin x$ *d)* $\cos^2 a$
e) $\tan x$ *f)* $\sec t$ *g)* 1 *h)* $\tan^2 A$
i) $\text{cosec}\ y$ *j)* $\cot^2 a$ *k)* $\tan^2\theta$ *l)* 1

2. *a)* $\pm\sqrt{1 - \sin^2\theta}$

b) $\pm \frac{\sin\theta}{\sqrt{1 - \sin^2\theta}}$ ou $\pm \frac{\sin\theta\sqrt{1 - \sin^2\theta}}{1 - \sin^2\theta}$

c) $\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2\theta}}{\sin\theta}$

d) $\pm \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\theta}}$ ou $\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2\theta}}{1 - \sin^2\theta}$

e) $\frac{1}{\sin\theta}$

3. $\sin\theta = \frac{12}{13}$

$\sec\theta = -\frac{13}{5}$

$\text{cosec}\ \theta = \frac{13}{12}$

$\tan\theta = -\frac{12}{5}$

$\cot\theta = -\frac{5}{12}$

4. $\sin\theta = -\frac{8}{17}$

$\cos\theta = -\frac{15}{17}$

$\sec\theta = -\frac{17}{15}$

$\tan\theta = \frac{8}{15}$

$\cot\theta = \frac{15}{8}$

5. $\sin\theta = -\frac{20}{29}$

$\text{cosec}\ \theta = -\frac{29}{20}$

$\cos\theta = \frac{21}{29}$

$\sec\theta = \frac{29}{21}$

$\cot\theta = -\frac{21}{20}$

6. *a)* $\frac{a + 2}{-a}$

b) $\frac{2(a + 1)}{-(a^2 + 2a)}$

c) $-(a + 1)^2$

7. *a)* $\frac{1}{\cos^2\theta}$ ou $\frac{1}{1 - \sin^2\theta}$ *b)* $\frac{1}{\sin^2\theta}$ ou $\frac{1}{1 - \cos^2\theta}$

c) $\sin^2\theta$ *d)* $\sin^2\theta$

e) $\cos^2\theta$ *f)* $\cos^2\theta$

8. $$\begin{aligned} x^2 - y^2 - z^2 &= r^2\sec^2\beta - r^2\tan^2\beta - r^2\sin^2\beta \\ &= r^2(\sec^2\beta - \tan^2\beta - \sin^2\beta) \\ &= r^2(1 - \sin^2\beta) \\ &= r^2\cos^2\beta \end{aligned}$$

9. *a)* $4k^2\tan\theta$ *b)* $4k^2$

10. *a)* 2 *b)* $4\sin t\cos t$

page 285

11. ***a)*** $\tan^2 x \cos^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\begin{aligned}\tan^2 x \cos^2 x + \cos^2 x &= \cos^2 x\,(\tan^2 x + 1)\\ &= \cos^2 x \bullet \sec^2 x\\ &= \cos^2 x \bullet \frac{1}{\cos^2 x}\\ &= 1\end{aligned}$$

b) $\sin^2 x \cot^2 x \sec x = \cos x$

$$\begin{aligned}\sin^2 x \cot^2 x \sec x &= \cancel{\sin^2 x} \bullet \frac{\cos^2 x}{\cancel{\sin^2 x}} \bullet \frac{1}{\cancel{\cos x}}\\ &= \cos x\end{aligned}$$

c) $\sec \beta - \cos \beta = \sin \beta \tan \beta$

$$\begin{aligned}\sec \beta - \cos \beta &= \frac{1}{\cos \beta} - \cos \beta\\ &= \frac{1 - \cos^2 \beta}{\cos \beta}\\ &= \frac{\sin^2 \beta}{\cos \beta}\\ &= \frac{\sin \beta}{\cos \beta} \bullet \sin \beta\\ &= \sin \beta \tan \beta\end{aligned}$$

d) $(1 - \cos^2 \beta)(1 + \tan^2 \beta) = \tan^2 \beta$

$$\begin{aligned}(1 - \cos^2 \beta)(1 + \tan^2 \beta) &= \sin^2 \beta \bullet \sec^2 \beta\\ &= \sin^2 \beta \bullet \frac{1}{\cos^2 \beta}\\ &= \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta}\\ &= \tan^2 \beta\end{aligned}$$

e) $(1 + \tan^2 x)(1 - \sin^2 x) = 1$

$$\begin{aligned}(1 + \tan^2 x)(1 - \sin^2 x) &= \sec^2 x \bullet \cos^2 x\\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \bullet \cos^2 x\\ &= 1\end{aligned}$$

f) $(\sec y - \tan y)^2 = \frac{1 - \sin y}{1 + \sin y}$

$$\begin{aligned}(\sec y - \tan y)^2 &= \left(\frac{1}{\cos y} - \frac{\sin y}{\cos y}\right)^2\\ &= \frac{(1 - \sin y)^2}{\cos^2 y}\\ &= \frac{(1 - \sin y)^2}{1 - \sin^2 y}\\ &= \left(\frac{1 - \sin y}{\cos^2 y}\right)^2\\ &= \frac{(1 - \sin y)^2}{\cancel{(1 - \sin y)}(1 + \sin y)}\\ &= \frac{1 - \sin y}{1 + \sin y}\end{aligned}$$

g) $1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$

$$\begin{aligned}1 - 2\sin^2 a &= \sin^2 a + \cos^2 a - 2\sin^2 a\\ &= \cos^2 a - \sin^2 a\\ &= \cos^2 a - (1 - \cos^2 a)\\ &= 2\cos^2 a - 1\end{aligned}$$

h) $\tan t + \cot t = \sec t \operatorname{cosec} t$

$$\begin{aligned}\tan t + \cot t &= \frac{\sin t}{\cos t} + \frac{\cos t}{\sin t}\\ &= \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t \cos t}\\ &= \frac{1}{\sin t \bullet \cos t}\\ &= \frac{1}{\sin t} \bullet \frac{1}{\cos t}\\ &= \operatorname{cosec} t \bullet \sec t\end{aligned}$$

i) $\frac{\sec \varphi}{\cos \varphi} - \frac{\tan \varphi}{\cot \varphi} = 1$

$$\begin{aligned}\frac{\sec \varphi}{\cos \varphi} - \frac{\tan \varphi}{\cot \varphi} &= \sec^2 \varphi - \tan^2 \varphi\\ &= 1 + \tan^2 \varphi - \tan^2 \varphi\\ &= 1\end{aligned}$$

12. ***a)*** $\tan x\,(\sin x + \cot x \cos x) = \sec x$

$$\begin{aligned}\tan x\,(\sin x + \cot x \cos x) &= \frac{\sin x}{\cos x}\left(\sin x + \frac{\cos x}{\sin x}\cos x\right)\\ &= \frac{\sin x}{\cos x}\left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x}\right)\\ &= \frac{1}{\cos x}\\ &= \sec x\end{aligned}$$

b) $\sin \alpha + \cos \alpha \cot \alpha = \operatorname{cosec} \alpha$

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \cos \alpha \cot \alpha &= \sin \alpha + \cos \alpha \bullet \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}\\ &= \sin \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}\\ &= \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha}\\ &= \frac{1}{\sin \alpha}\\ &= \operatorname{cosec} \alpha\end{aligned}$$

c) $(\sec A + \tan A - 1)(\sec A - \tan A + 1) = 2\tan A$

$$\begin{aligned}(\sec A + \tan A - 1)(\sec A - \tan A + 1) &= \sec^2 A - \sec A \tan A + \sec A + \sec A \tan A - \tan^2 A + \tan A -\\ &\quad\ \sec A + \tan A - 1\\ &= \sec^2 A - \tan^2 A + 2\tan A - 1\\ &= (1 + \tan^2 A) - \tan^2 A + 2\tan A - 1\\ &= 2\tan A\end{aligned}$$

d) $\dfrac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta} = 1 + \sin\theta$

$$\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta} = \frac{1-\sin^2\theta}{1-\sin\theta}$$
$$= \frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)}$$
$$= 1 + \sin\theta$$

e) $\dfrac{1+\tan^2\theta}{\operatorname{cosec}^2\theta} = \tan^2\theta$

$$\frac{1+\tan^2\theta}{\operatorname{cosec}^2\theta} = \frac{\sec^2\theta}{\operatorname{cosec}^2\theta}$$
$$= \frac{\frac{1}{\cos^2\theta}}{\frac{1}{\sin^2\theta}}$$
$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$
$$= \tan^2\theta$$

f) $\dfrac{\sin\varphi}{\sin\varphi+\cos\varphi} = \dfrac{\tan\varphi}{1+\tan\varphi}$

$$\frac{\tan\varphi}{1+\tan\varphi} = \frac{\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}}$$
$$= \frac{\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{\frac{\cos\varphi+\sin\varphi}{\cos\varphi}}$$
$$= \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi+\sin\varphi}$$

g) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = 2\sec\alpha$

$$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha\,(1-\sin\alpha) + \cos\alpha\,(1+\sin\alpha)}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)}$$
$$= \frac{\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$$
$$= \frac{2\cos\alpha}{\cos^2\alpha}$$
$$= \frac{2}{\cos\alpha}$$
$$= 2\sec\alpha$$

h) $\sec\theta - \cos\theta = \sin\theta\tan\theta$

$$\sec\theta - \cos\theta = \frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta$$
$$= \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}$$
$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$
$$= \sin\theta \bullet \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= \sin\theta\tan\theta$$

i) $(\tan x - \cot x)\sin x\cos x = \sin^2 x - \cos^2 x$

$$(\tan x - \cot x)\sin x\cos x = \left(\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)\sin x\cos x$$
$$= \left(\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos x\sin x}\right) \bullet \sin x\cos x$$
$$= \sin^2 x - \cos^2 x$$

13. *a)* $\dfrac{\tan^2\gamma}{1+\tan^2\gamma} \bullet \dfrac{1+\cot^2\gamma}{\cot^2\gamma} = \sin^2\gamma\sec^2\gamma$

$$\frac{\tan^2\gamma}{1+\tan^2\gamma} \bullet \frac{1+\cot^2\gamma}{\cot^2\gamma} = \frac{\tan^2\gamma}{\sec^2\gamma} \bullet \frac{\operatorname{cosec}^2\gamma}{\cot^2\gamma}$$
$$= \frac{\left(\frac{\sin^2\gamma}{\cos^2\gamma}\right)}{\left(\frac{1}{\cos^2\gamma}\right)} \bullet \frac{\left(\frac{1}{\sin^2\gamma}\right)}{\left(\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\gamma}\right)}$$
$$= \frac{\frac{1}{\cos^2\gamma}}{\frac{1}{\sin^2\gamma}}$$
$$= \frac{1}{\cos^2\gamma} \bullet \frac{\sin^2\gamma}{1}$$
$$= \sin^2\gamma\sec^2\gamma$$

b) $(\sin\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2 + (\cos\theta + \sec\theta)^2 = \tan^2\theta + \cot^2\theta + 7$

$$(\sin\theta + \operatorname{cosec}\theta)^2 + (\cos\theta + \sec\theta)^2 = \sin^2\theta + 2\sin\theta\operatorname{cosec}\theta + \operatorname{cosec}^2\theta + \cos^2\theta + 2\cos\theta\sec\theta + \sec^2\theta$$
$$= \sin^2\theta + 2 + \operatorname{cosec}^2\theta + \cos^2\theta + 2 + \sec^2\theta$$
$$= 1 + 2 + 2 + \operatorname{cosec}^2\theta + \sec^2\theta$$
$$= 5 + 1 + \cot^2\theta + 1 + \tan^2\theta$$
$$= 7 + \tan^2\theta + \cot^2\theta$$

c) $\sec^4 x - 1 = 2\tan^2 x + \tan^4 x$

$$\begin{aligned}\sec^4 x - 1 &= (\sec^2 x - 1)(\sec^2 x + 1)\\ &= \tan^2 x\,(1 + \tan^2 x + 1)\\ &= \tan^2 x\,(2 + \tan^2 x)\\ &= 2\tan^2 x + \tan^4 x\end{aligned}$$

d) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x$

$$\begin{aligned}\sin^4 x + \cos^4 x &= (\cos^2 x - \cos^2 x)(\cos^2 x + \cos^2 x)\\ &= (1 - \cos^2 x - \cos^2 x)(1)\\ &= 1 - 2\cos^2 x\end{aligned}$$

e) $(1 + \tan\beta)^2 + (1 - \tan\beta)^2 = 2\sec^2\beta$

$$\begin{aligned}(1 + \tan\beta)^2 + (1 - \tan\beta)^2 &= 1 + 2\tan\beta + \tan^2\beta + 1 - 2\tan\beta + \tan^2\beta\\ &= 2 + 2\tan^2\beta\\ &= 2(1 + \tan^2\beta)\\ &= 2\sec^2\beta\end{aligned}$$

f) $\sin^2\theta\,(1 + \cot^2\theta) + \cos^2\theta\,(1 + \tan^2\theta) = 2$

$$\begin{aligned}\sin^2\theta\,(1 + \cot^2\theta) + \cos^2\theta\,(1 + \tan^2\theta) &= \sin^2\theta \bullet \operatorname{cosec}^2\theta + \cos^2\theta \bullet \sec^2\theta\\ &= \sin^2\theta \bullet \frac{1}{\sin^2\theta} + \cos^2\theta \bullet \frac{1}{\cos^2\theta}\\ &= 1 + 1\\ &= 2\end{aligned}$$

g) $(1 - \sin x + \cos x)^2 = 2(1 - \sin x)(1 + \cos x)$

$$\begin{aligned}(1 - \sin x + \cos x)^2 &= 1 - \sin x + \cos x - \sin x + \sin^2 x -\\ &\quad \sin x\cos x + \cos x - \sin x\cos x + \cos^2 x\\ &= 1 - 2\sin x + 2\cos x - 2\sin x \bullet \cos x +\\ &\quad \sin^2 x + \cos^2 x\\ &= 2 - 2\sin x + 2\cos x - 2\sin x\cos x\\ &= 2(1 - \sin x + \cos x - \sin x\cos x)\\ &= 2(1(1 - \sin x) + \cos x(1 - \sin x))\\ &= 2(1 - \sin x)(1 + \cos x)\end{aligned}$$

h) $\dfrac{\sec^2 x\cot x}{\operatorname{cosec}^2 x} = \tan x$

$$\begin{aligned}\frac{\sec^2 x\cot x}{\operatorname{cosec}^2 x} &= \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) \bullet \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)}{\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)}\\ &= \frac{\frac{1}{(\cos x \sin x)}}{\frac{1}{\sin^2 x}}\\ &= \frac{\sin^2 x}{\cos x\sin x}\\ &= \frac{\sin x}{\cos x}\\ &= \tan x\end{aligned}$$

page 286

Forum

a) $f(x) = \sin 2x$

b) $g(x) = \cos 2x$ ou $g(x) = \sin 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

c) $\tan 2x = \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} = \dfrac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

$$= \frac{\frac{(2\sin x\cos x)}{\cos^2 x}}{\left(\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\right) - \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)}$$

$$= \frac{\frac{2\sin x}{\cos x}}{1 - \tan^2 x}$$

$$= \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

d) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$$

$$\Rightarrow \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}\right)^2}$$

page 287

Rencontre de sinusoïdes

a) $\cos x \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

b) Oui.

c) $\left\{\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$

d) π

page 288

Des variations de voltage

a) 1) 1   2) 4 fois.

b) $\frac{1}{6} + n$ ou $\frac{5}{6} + n$, où $n \in \mathbb{N}$

page 289

Les identités à la rescousse

a) $\sin \theta \neq 0$, $\cos \theta \neq 0$ et $\theta \neq \frac{\pi}{2}n,\ n \in \mathbb{Z}$

b) (dénominateur commun)
($\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$)
(distributivité de la multiplication sur l'addition)
(addition des termes semblables et fait de ramener l'égalité à 0)

c) C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

d) $-3 \in [-1, 1]$ (-3 n'appartient pas au codomaine de la fonction.)

e) Oui.

page 291

Investissement 9

1. ***a)*** $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$
   b) $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$
   c) $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$
   d) $x \approx 3{,}84$ ou $x \approx 5{,}58$
   e) $x \approx 0{,}57$ ou $x \approx 2{,}57$
   f) $x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

2. ***a)*** $\theta = -\frac{\pi}{2}$
   b) $\theta = -\frac{\pi}{6}$
   c) $\theta = -\frac{\pi}{4}$
   d) $\theta = -\pi$
   e) Aucune solution.
   f) $\theta \approx -2{,}03$

page 292

3. ***a)*** $\{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta = \frac{\pi}{2}n,\ n \in \mathbb{Z}\}$
   b) $\{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\} \cup$
   $\{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\}$
   c) $\{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta \approx 0{,}94 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\} \cup$
   $\{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta \approx -0{,}94 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\}$
   d) $\{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\} \cup$
   $\{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta \approx 0{,}73 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\} \cup$
   $\{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta \approx 2{,}41 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\}$
   e) $\{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n,\ n \in \mathbb{Z}\}$
   f) $\{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\}$
   g) $\{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}n,\ n \in \mathbb{Z}\}$
   h) $\{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\}$
   i) $\{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\} \cup$
   $\{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta \approx 1{,}25 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\}$
   j) $\{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n,\ n \in \mathbb{Z}\}$
   k) $\{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\} \cup$
   $\{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\}$
   l) $\{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta \approx 1{,}11 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\} \cup$
   $\{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta \approx -1{,}11 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\}$

4. ***a)*** $\approx 77{,}5°$ ***b)*** 4.5 m

5. ***a)*** 3:15, 9:45, 16:15 et 22:45
   b) Environ 4:46, 8:14, 17:46 et 21:14.

6. ***a)*** Après $\approx 0{,}0042$ s.
   b) Après $\approx 0{,}071$ s.

page 293

7. *a)* $\approx 1{,}15$ rad

   b) $\approx 1{,}42$ rad

8. *a)* $\{x \mid x \approx 99{,}0° + 180°n$ ou $x \approx 177{,}0° + 180°n,\ n = 0, 1, 2, 3\}$

   b) $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}$

   $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbb{Z}$

   c) $\{\theta \mid \theta \approx -2.45 + n$ ou $\theta \approx -2.05 + n,\ n = 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

9. *a)* $\{15°, 75°, 195°, 255°\}$

   b) $\{270°, \approx 323{,}13°\}$

10. *a)* $P(\theta) = 10\ (1 + \sin\theta + \cos\theta)$

    b) 45°

    c) $\approx 13{,}05°$ et $\approx 76{,}95°$

11. *a)* 7 500 habitants.

    b) 13 900 habitants.

    c) Entre le 4ᵉ et le 9ᵉ mois. (De la fin d'avril ($x \approx 3{,}2$) au début de septembre ($x \approx 8{,}2$).)

page 294

12. *a)* À 1s, 2s, 4s, 5s, 7s, 8s, 10s, 11s, 13s, 14 s.

    b) À 10 cm.

13. *a)* $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

    b) $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right[$

14. *a)* $\theta \approx 67{,}7°$

    b) $\approx 12{,}16$ m

15. *a)* $y = 2 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + 10$

    b) À environ 1,33 s, 3,67 s, 6,33 s, 7,67 s, 10,33 s, 11,67 s.

16. *a)* $\{\approx 0{,}44, \approx 3{,}17, \approx 5{,}80\}$

    b) $\{\approx -1{,}29, 0\}$

    c) $\{\approx -0{,}82, \approx 0{,}82\}$

    d) $\{\approx 4{,}05, \approx 5{,}79\}$

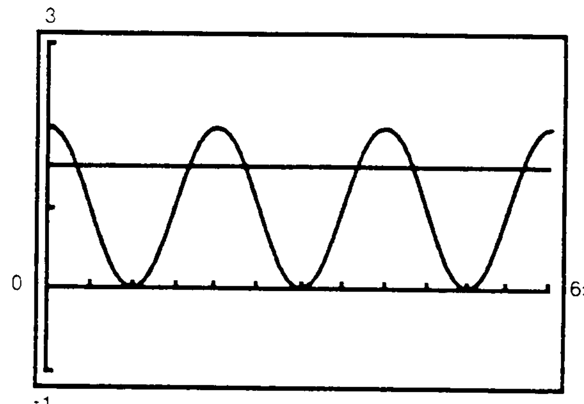
page 295

Forum

a) 1) $|b| > |a|$
2) $|b| = |a|$
3) $|b| < |a|$

b) 1) à 3) (Voir les notes didactiques.)

c) 1) $y = a + k$
2) $n + 1$ où n est le nombre de cycles.
3)



$2n$, où n est le nombre de cycles.

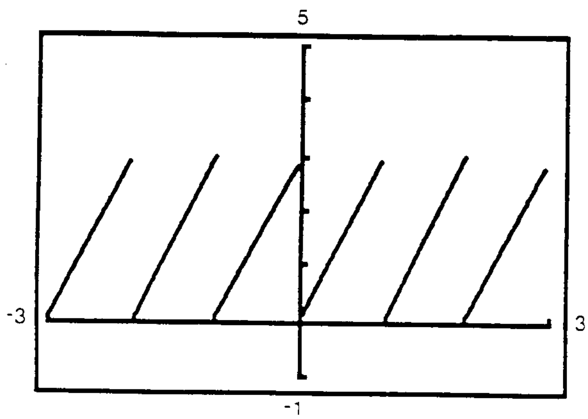
page 297

Maîtrise 10

B	1.	*a)* 0,5	*b)* 0,9	*c)* 0,6	
		d) 1,2	*e)* 2	*f)* 1,8	
B	2.	*a)* 0	*b)* 0	*c)* 0	*d)* 1
		e) -1	*f)* 0	*g)* 1	*h)* 0
B	3.	*a)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$	*b)* $\frac{1}{2}$	*c)* $\sqrt{3}$	*d)* $\frac{1}{2}$
		e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$	*f)* $\sqrt{2}$	*g)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$	*h)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$
B	4.	*a)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$	*b)* 0	*c)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$	*d)* 1
B	5.	*a)* 0,8	*b)* 0,9	*c)* 0,8	*d)* 0,9
B	6.	*a)* 0,16	*b)* 1	*c)* 0,5	*d)* 1,1
		e) 2,4	*f)* 2,2	*g)* 1,25	*h)* 0,7

B 7. *a)* 1) cos A
2) cosec A
3) cot A
4) sin A

3)

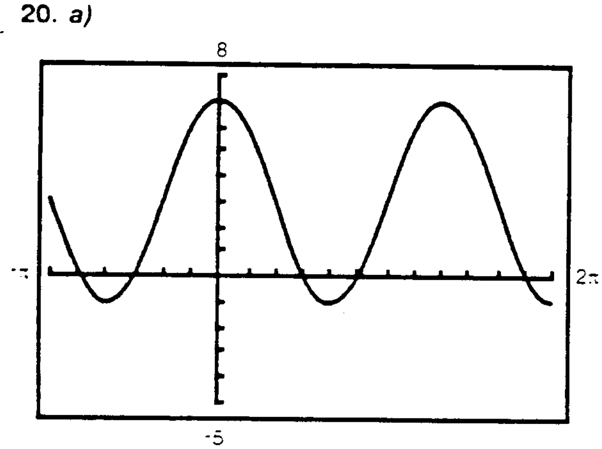


page 300

B **19.** *a)* (Travail à la calculatrice.)

b) Pendant que se trace le cercle trigonométrique, les ordonnées de chacun des points de ce cercle forment les points (T, sin T) et ces points sont placés dans le plan cartésien formant ainsi simultanément le graphique de la fonction sinus.

B **20.** *a)*



b) 1) 4 2) $\frac{4\pi}{3}$ 3) -1 4) 7

c) $x \approx 1{,}61 + \frac{4\pi n}{3}$, où $n \in \{-1, 0, 1\}$

$x \approx 2{,}58 + \frac{4\pi n}{3}$, où $n \in \{-2, -1, 0, 1\}$

d) $[-2\pi, \approx -5{,}80] \cup [\approx -2{,}58, \approx -1{,}61] \cup [\approx 1{,}61, \approx 2{,}58] \cup [\approx 5{,}80, \approx 6{,}77]$

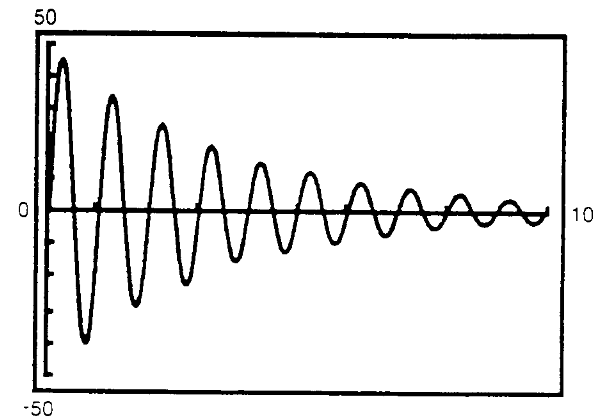
R **21.** *a)* 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) (Autres réponses possibles.)

$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x$ ou $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x$

R **22.** *a)* $g \circ f(x) = 50(0{,}75^x) \sin 2\pi x$

b)



c) Non.

d) $[\approx -40{,}30, \approx 46{,}53]$

e) $x = 0{,}5n$, $n \in \mathbb{N}$

B **23.** *a)* $g(x) = -3{,}5 \sin \frac{\pi}{2}x + 1{,}5$

b) $x \approx 0{,}28 + 4n$ où $n \in \{-1, 0, 1, 2\}$

$x \approx 1{,}72 + 4n$ où $n \in \{-1, 0, 1, 2\}$

page 301

B **24.** $f(x) = \sin \frac{2\pi}{3}x$

$g(x) = -\sin \frac{2\pi x}{3} + 2$

$h(x) = -\sin \frac{2\pi x}{3} - 2$

R **25.** $g(x) = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right| + 5$

$h(x) = -3\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right| + 5$

V **26.** *a)* ≈ 24,55 $

b) min = 24,50 $

max = 31,50 $

c) 9 mois

d) Après 4,25 mois.

e) 29,20 $

V **27.** *a)* (Autres réponses possibles.)

$P(x) \approx 3003 \sin \frac{\pi}{4}(x - 2) + 4005$

b) Environ 4 mois.

c) ≈ 7000 poulets.

page 302

B 28. $B\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$, $C\left(\frac{3\pi}{8}, -3\right)$, $D\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $E\left(\frac{5\pi}{8}, 3\right)$

B 29. *a)* $p = \pi$

$A = 1$

La courbe de f est obtenue par une translation de $\frac{\pi}{4}$ vers la gauche de celle de g.

b) $p = 2\pi$

$A = 2$

La courbe de f est obtenue par une translation de $\frac{\pi}{2}$ vers la droite de celle de g.

c) $p = \frac{2\pi}{5}$

$A = 2$

La courbe de f est obtenue par une translation d'environ 0,43 vers la droite de celle de g.

B 30.

	Amplitude	Période	Domaine	Codomaine
$f(x)$	5	2π	IR	[5, 15]
$g(x)$	2	2	IR	[-3, 1]
$h(x)$	1	π	IR	[-6, -4]

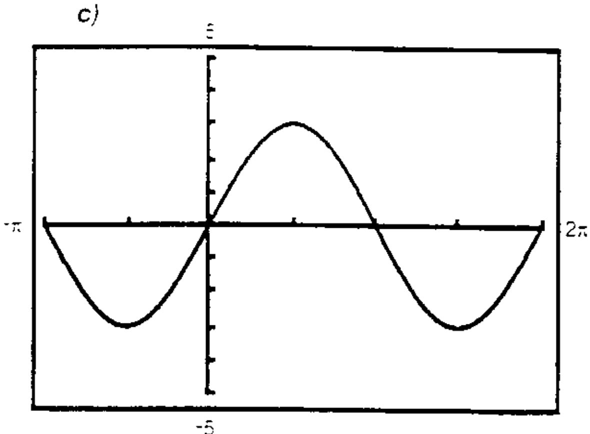
R 31. *a)* $f(x) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin x$

$g(x) = -\sin x$

L'amplitude de la fonction f est le double de celle de g. Les deux fonctions ont les mêmes zéros. Lorsqu'une fonction est croissante, l'autre est décroissante et vice-versa. Lorsqu'une fonction est positive, l'autre est négative et vice-versa.

b) $(f + g)(x) = \sin x$

c)



d) $(f - g)(x) = 3 \sin x$

B 32. *a)* $f(x) = 2{,}5 \sin \frac{\pi}{2}(x - 1)$

b) $g(x) = -5 \sin \frac{\pi}{4}(x - 1) - 3$

page 303

R 33. *a)* $\approx$ 0,841 471 009 7

b) $\approx$ 0,841 470 984 8

c) $\approx$ 0,877 582 562 2

d) $\approx$ 0,877 582 561 9

N 34. $\approx$ 89,8°

B 35. (Autres réponses possibles.)

$-\frac{5\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}$

B 36. *a)* $\frac{\pi}{3}$

b) $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$ pour $n \in \mathbb{Z}\}$

c) $x = -\frac{\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{2}$

B 37. *a)* Mêmes période, asymptotes, zéros, domaine et codomaine.

b) Une réflexion par rapport à l'axe des y ou une réflexion par rapport à l'axe des x.

V 38. *a)* $f(\theta) = 3 \tan \theta$

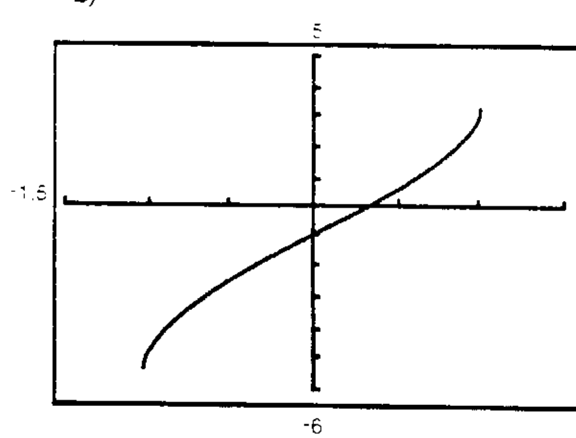
b) $g(\theta) = 9\pi \tan \theta$

B 39. C)

page 304

R 40. *a)* $(g \circ f)(x) = 3 \sin^{-1} x - 1$

b)



c) Domaine : $[-1, 1]$
Codomaine : $\left[-\frac{3\pi}{2} - 1, \frac{3\pi}{2} - 1\right]$

B **41.** *a)* 0 *b)* 0 *c)* $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ *d)* $\frac{1}{2}$

B **42.** $\sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right) = \sin\left(2\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$

$\sin(\theta + \theta) = \sin 2\theta$

$\sin 2\theta = \sin 2\theta$

B **43.** *a)* $\approx 0{,}9955$ *b)* $\approx 2{,}0698$

B **44.** *a)* $x = \frac{3}{4}$

b) $x = \frac{-4\sqrt{2}}{5}$

c) $x = \frac{\pi - 12}{18}$

B **45.** $\sin\theta = \sqrt{1 - x^2}$

$\tan\theta = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$

$\sec\theta = \frac{1}{x}$

$\text{cosec}\,\theta = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 - x^2}$

$\cot\theta = \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{1 - x^2}$

B **46.** *a)* $x = \frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{y - 2}{3} + 10$,

où $x \in \left[10, 10 + \frac{\pi}{2}\right]$ et $y \in [-1, 5]$

b) $x = \frac{1}{2\pi}\sin^{-1}\left(\frac{y}{2}\right) + 1$,

où $x \in \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$ et $y \in [-2, 2]$

R **47.** *a)* 1) La courbe est symétrique par rapport à l'origine.

2) La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b) f_1 est impaire.
f_2 est paire.
f_3 est impaire.
f_4 est impaire.
f_5 est paire.
f_6 est impaire.
f_7 est impaire.
f_8 est ni l'une ni l'autre.
f_9 est impaire.

B **48.** *a)* $(\cos 0{,}5)^{-1}$

b) $\cos^{-1}(0{,}5)$

c) $\cos(0{,}5)^{-1}$

page 305

49. *a)* $\frac{\sin\theta\cot^2\theta}{\cos\theta} = \cot\theta$

$$\frac{\sin\theta\cot^2\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cot^2\theta$$
$$= \cancel{\tan\theta}\cdot\frac{1}{\tan^{\cancel{2}}\theta}$$
$$= \frac{1}{\tan\theta}$$
$$= \cot\theta$$

b) $\sin x(1 + \tan x) + \cos x(1 + \cot x) = \sec x + \text{cosec}\,x$

$$\sin x(1 + \tan x) + \cos x(1 + \cot x) = \sin x\left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right) + \cos x\left(1 + \frac{\cos x}{\sin x}\right)$$
$$= \sin x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cdot \cos x}$$
$$= \frac{\sin^2 x}{\sin x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \frac{\cos^2 x}{\cos x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x}$$
$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x} + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x}$$
$$= \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$$
$$= \sec x + \text{cosec}\,x$$

c) $\dfrac{2 \sin x \cos x - \cos x}{1 - \sin x + \sin^2 x - \cos^2 x} = \dfrac{1}{\tan x}$

$$\begin{aligned}
\frac{2 \sin x \cos x - \cos x}{1 - \sin x + \sin^2 x - \cos^2 x} &= \frac{\cos x\,(2 \sin x - 1)}{(1 - \cos^2 x) - \sin x + \sin^2 x} \\
&= \frac{\cos x\,(2 \sin x - 1)}{\sin^2 x - \sin x + \sin^2 x} \\
&= \frac{\cos x\,(2 \sin x - 1)}{\sin x\,(\sin x - 1 + \sin x)} \\
&= \frac{\cos x\,\cancel{(2 \sin x - 1)}}{\sin x\,\cancel{(2 \sin x - 1)}} \\
&= \frac{\cos x}{\sin x} \\
&= \frac{1}{\tan x}
\end{aligned}$$

d) $\cos x\,(\tan x + 2)(2 \tan x + 1) = 2 \sec x + 5 \sin x$

$$\begin{aligned}
\cos x\,(\tan x + 2)(2 \tan x + 1) &= \cos x \left(\frac{\sin x}{\cos x} + 2\right)\left(\frac{2 \sin x}{\cos x} + 1\right) \\
&= (\sin x + 2 \cos x)\left(\frac{2 \sin x}{\cos x} + 1\right) \\
&= \frac{2 \sin^2 x}{\cos x} + \sin x + 4 \sin x + 2\,\mathrm{co} \\
&= \frac{2 \sin^2 x}{\cos x} - 2 \cos x + 5 \sin x \\
&= \frac{2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x}{\cos x} + 5 \sin x \\
&= \frac{2\,(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\cos x} + 5 \sin x \\
&= \frac{2}{\cos x} + 5 \sin x \\
&= 2 \sec x + 5 \sin x
\end{aligned}$$

e)

$(\sin x \cos y + \cos x \sin y)^2 + (\cos x \cos y - \sin x \sin y)^2 = 1$

$$\begin{aligned}
(\sin x \cos y + \cos x \sin y)^2 + (\cos x \cos y - \sin x \sin y)^2 &= \sin^2 x \cos^2 x + 2 \sin x \sin y \cos x \cos y + \cos^2 x \sin^2 y + \\
&\quad \cos^2 x \cos^2 y - 2 \sin x \sin y \cos x \cos y + \sin^2 x \sin^2 y \\
&= \sin^2 x \cos^2 y + \cos^2 x \sin^2 y + \cos^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \sin^2 y \\
&= \cos^2 y\,(\sin^2 x + \cos^2 x) + \sin^2 y\,(\cos^2 x + \sin^2 x) \\
&= \cos^2 y\,(1) + \sin^2 y\,(1) \\
&= \cos^2 y + \sin^2 y \\
&= 1
\end{aligned}$$

f) $\dfrac{\cos x + \sin x}{\sec x + \operatorname{cosec} x} = \cos x \sin x$

$$\begin{aligned}
\frac{\cos x + \sin x}{\sec x + \operatorname{cosec} x} &= \frac{\cos x + \sin x}{\left(\frac{1}{\cos x}\right) + \left(\frac{1}{\sin x}\right)} \\
&= \frac{\cos x + \sin x}{\frac{(\sin x + \cos x)}{(\sin x \cos x)}} \\
&= (\sin x \cos x)\,\frac{(\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)} \\
&= \sin x \cos x
\end{aligned}$$

g) $\dfrac{1}{1 - \sin x} + \dfrac{1}{1 + \sin x} = 2 \sec^2 x$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 + \sin x} &= \frac{1 + \sin x + 1 - \sin x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} \\
&= \frac{2}{1 - \sin^2 x} \\
&= \frac{2}{\cos^2 x} \\
&= 2 \sec^2 x
\end{aligned}$$

h) $\dfrac{\tan x}{\sec x - 1} + \dfrac{\tan x}{\sec x + 1} = 2 \operatorname{cosec} x$

$$\begin{aligned}
\frac{\tan x}{\sec x - 1} + \frac{\tan x}{\sec x + 1} &= \frac{\tan x\,(\sec x + 1) + \tan x\,(\sec x - 1)}{\sec^2 x - 1} \\
&= \frac{\tan x\,(\sec x + 1 + \sec x - 1)}{\tan^2 x} \\
&= \frac{2 \sec x}{\tan x} \\
&= \frac{2\left(\frac{1}{\cos x}\right)}{\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)} \\
&= \frac{2}{\cos x} \bullet \frac{\cos x}{\sin x} \\
&= 2 \operatorname{cosec} x
\end{aligned}$$

i) $(1 - \sin x + \cos x)^2 = 2\,(1 - \sin x)(1 + \cos x)$

$$\begin{aligned}(1 - \sin x + \cos x)^2 &= 1 + \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x + 2\cos x - 2\sin x\cos x\\ &= 1 + 1 - 2\sin x + 2\cos x - 2\sin x\cos x\\ &= 2 - 2\sin x + 2\cos x - 2\sin x\cos x\\ &= 2\,(1 - \sin x) + 2\cos x\,(1 - \sin x)\\ &= 2\,(1 - \sin x)(1 + \cos x)\end{aligned}$$

j) $\dfrac{\sin\theta + \tan\theta}{\text{cosec}\,\theta + \cot\theta} = \sin\theta\tan\theta$

$$\begin{aligned}\frac{\sin\theta + \tan\theta}{\text{cosec}\,\theta + \cot\theta} &= \frac{\sin\theta + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}}\\ &= \frac{\frac{\sin\theta\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}}\\ &= \frac{\sin\theta\,(\cos\theta + 1)\sin}{\cos\theta\,(1 + \cos\theta)}\\ &= \sin\theta \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\\ &= \sin\theta\tan\theta\end{aligned}$$

50.

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= r^2\\ r^2\sin^2 A\cos^2 B + r^2\sin^2 A\sin^2 B + r^2\cos^2 A &= r^2\\ r^2(\sin^2 A\cos^2 B + \sin^2 A\sin^2 B + \cos^2 A) &= r^2\\ \sin^2 A\cos^2 B + \sin^2 A\sin^2 B + \cos^2 A &= 1\\ \sin^2 A(\cos^2 B + \sin^2 B) + \cos^2 A &= 1\\ \sin^2 A\,(1) + \cos^2 A &= 1\\ \sin^2 A + \cos^2 A &= 1\end{aligned}$$

B **51.** *a)* $-\frac{5}{13}$ *b)* $-\frac{12}{13}$ *c)* $\frac{12}{5}$ *d)* $-\frac{13}{12}$ *e)* $-\frac{13}{5}$

52. *a)* $\sec\theta = \pm\dfrac{\sqrt{1 - \sin^2\theta}}{1 - \sin^2\theta}$

b) $\cot\theta = \pm\dfrac{\sqrt{1 - \sin^2\theta}}{\sin\theta}$

R **53.** *a)* Non, car même si le sinus est un rapport entre la mesure d'une cathète et celle de l'hypoténuse, ce rapport a pu être réduit.

b) 1) $\dfrac{\sqrt{2ab + b^2}}{a + b}$ 2) $\dfrac{a\sqrt{2ab + b^2}}{2ab + b^2}$ 3) $\dfrac{a\sqrt{2ab + b^2}}{2ab + b^2}$

54. *a)* $1 + \sec^2 x\sin^2 x = \sec^2 x$

$$\begin{aligned}1 + \sec^2 x\sin^2 x &= 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\\ &= 1 + \tan^2 x\\ &= \sec^2 x\end{aligned}$$

b) $\dfrac{\sec\theta + 1}{\tan\theta} = \dfrac{\tan\theta}{\sec\theta - 1}$

$$\begin{aligned}\frac{\sec\theta + 1}{\tan\theta} &= \frac{(\sec\theta + 1)(\sec\theta - 1)}{\tan\theta\,(\sec\theta - 1)}\\ &= \frac{\sec^2\theta - 1}{\tan\theta\,(\sec\theta - 1)}\\ &= \frac{1 + \tan^2\theta - 1}{\tan\theta\,(\sec\theta - 1)}\\ &= \frac{\tan^2\theta}{\tan\theta\,(\sec\theta - 1)}\\ &= \frac{\tan\theta}{\sec\theta - 1}\end{aligned}$$

c) $\dfrac{1 + \tan\varphi}{1 + \cot\varphi} = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$

$$\begin{aligned}\frac{1 + \tan\varphi}{1 + \cot\varphi} &= \frac{1 + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{\frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi}}\\ &= \frac{\frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi}}{\frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{\sin\varphi}}\\ &= \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\end{aligned}$$

d) $\dfrac{1 - \cos\gamma}{1 + \cos\gamma} = (\text{cosec}\,\gamma - \cot\gamma)^2$

$$\begin{aligned}(\text{cosec}\,\gamma - \cot\gamma)^2 &= \left(\frac{1}{\sin\gamma} - \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)^2\\ &= \left(\frac{1 - \cos\gamma}{\sin\gamma}\right)^2\\ &= \frac{(1 - \cos\gamma)^2}{\sin^2\gamma}\\ &= \frac{(1 - \cos\gamma)^2}{1 - \cos^2\gamma}\\ &= \frac{(1 - \cos\gamma)(1 - \cos\gamma)}{(1 - \cos\gamma)(1 + \cos\gamma)}\\ &= \frac{1 - \cos\gamma}{1 + \cos\gamma}\end{aligned}$$

e) $\dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = \dfrac{1 - \cos x}{\sin x}$

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{1 + \cos x} &= \frac{\sin x}{1 + \cos x} \times \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x}\\ &= \frac{\sin x\,(1 - \cos x)}{1 - \cos^2 x}\\ &= \frac{\sin x\,(1 - \cos x)}{\sin^2 x}\\ &= \frac{1 - \cos x}{\sin x}\end{aligned}$$

f) $1 - \cot^4 x = 2\,\text{cosec}^2 x - \text{cosec}^4 x$

$$\begin{aligned}1 - \cot^4 x &= (1 + \cot^2 x)(1 - \cot^2 x)\\ &= \text{cosec}^2 x\,(1 - (\text{cosec}^2 x - 1))\\ &= \text{cosec}^2 x\,(1 - \text{cosec}^2 x + 1)\\ &= \text{cosec}^2 x\,(2 - \text{cosec}^2 x)\\ &= 2\,\text{cosec}^2 x - \text{cosec}^4 x\end{aligned}$$

page 306

R 55. *a)* $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$

b) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ ou
$\cos^2\theta = 1 - 2 \sin^2\theta$ ou
$\cos^2\theta = 2 \cos^2\theta - 1$

B 56. *a)* $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ *b)* $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

c) $-2 - \sqrt{3}$ *d)* $\sqrt{6} - \sqrt{2}$

B 57. *a)* $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

b) $\left\{\frac{\pi}{4}, \approx 1{,}95, \frac{5\pi}{4}, \approx 5{,}09\right\}$

c) $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

d) $\left\{\frac{\pi}{2}, \approx 2{,}56, \approx 3{,}73, \frac{3\pi}{2}\right\}$

B 58. *a)* $\{t \in \mathbb{R} \mid t = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \text{ où } n \in \mathbb{Z}\} \cup$
$\{t \in \mathbb{R} \mid t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \text{ où } n \in \mathbb{Z}\}$

b) $\{t \in \mathbb{R} \mid t = \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$

c) $\{t \in \mathbb{R} \mid t \approx 1{,}11 + \pi n, n \in \mathbb{Z}\} \cup$
$\{t \in \mathbb{R} \mid t \approx 1{,}89 + \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$

d) $\{t \in \mathbb{R} \mid t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}\} \cup$
$\{t \in \mathbb{R} \mid t \approx 0{,}25 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}\} \cup$
$\{t \in \mathbb{R} \mid t \approx 2{,}89 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}\}$

R 59. *a)* $\approx 25{,}7°$ ou $\approx 64{,}3°$

b) 64 cm²

R 60. *a)* $P = \frac{28 \sin \theta + 8 \cos \theta + 8}{\sin \theta}$

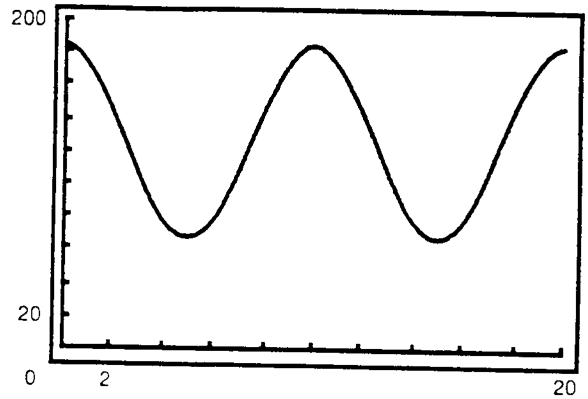
b) $\approx 28{,}1$

page 307

V 61. 21,63 km/h

V 62. *a)* $f(x) = -57{,}5 \sin \frac{\pi}{5}(x - 2{,}5) + 125{,}5$, où x est le nombre d'années écoulées depuis 1976.

b)



c) Environ 79 lièvres.

V 63. *a)* $\frac{75}{\pi}$ cycles/s $\approx$ 23,87 cycles/s

b) $g(t) = 20 \sin 600(t - 25)$

V 64. $\approx 48{,}2°$

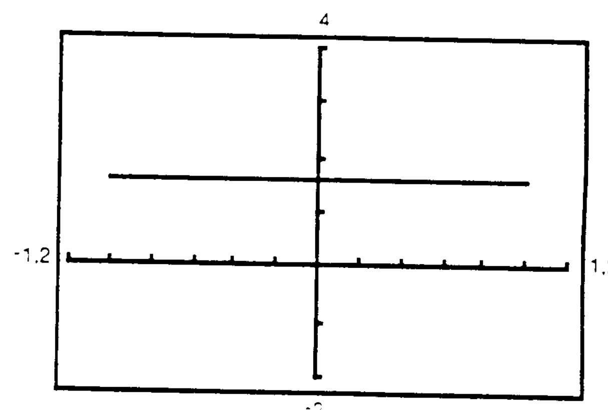
page 308

V 65. *a)* $\approx$ 59,87 m

b) $\approx 19{,}4°$ ou $\approx 70{,}6°$

c) 45°

V 66. *a)*



b) $(f + g)(x) = \frac{\pi}{2}$

c) Domaine $(f + g) = [-1, 1]$
Image $(f + g) = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

V 67. *a)* $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{r}{r + h}\right)$

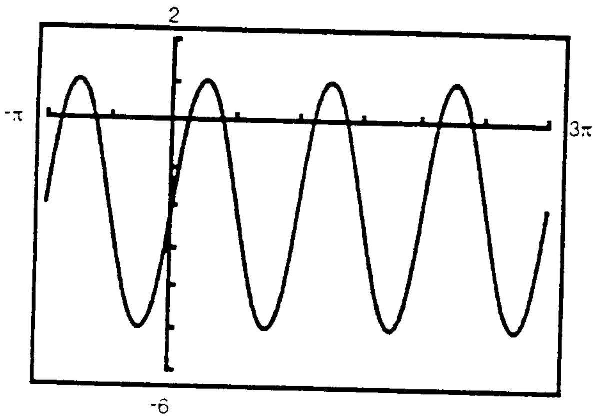
b) 39,2°

c) m $\overset{\frown}{ACB} \approx 0{,}6891 \times$ longueur du demi-cercle d'horizon.

page 309

Capsule d'évaluation 10

1. *a)*



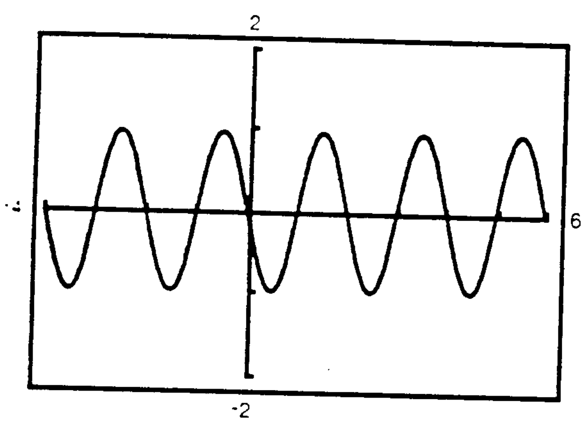
b) [-5, 1]

c) π

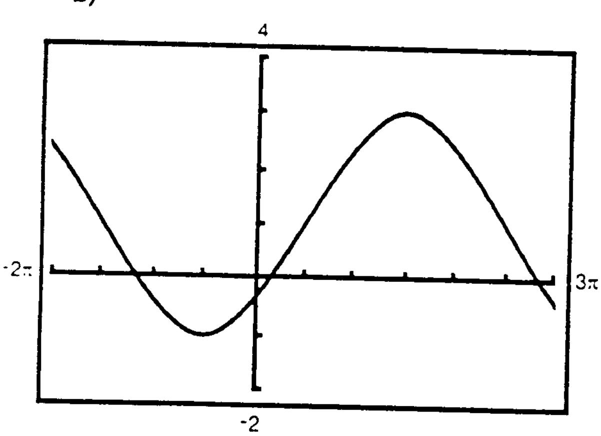
d) 4 cycles.

e) ≈ -2,78, ≈ -1,94, ≈ 0,36, ≈ 1,21, ≈ 3,51, ≈ 4,35, ≈ 6,65, ≈ 7,49

2. *a)*



b)



3. *a)* $y = 2 \sin 2x$

b) $y = \cos x + 1$ ou $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$

4. *a)* 2 *b)* $\frac{2\pi}{3}$ *c)* 4

5. *a)* $\frac{\sec x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \cot x$

$$\begin{aligned}\frac{\sec x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{\frac{1}{\cos x}}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}\\ &= \frac{1}{\cos x \sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}\\ &= \frac{1}{\cos x \sin x} - \frac{\sin x \sin x}{\cos x \sin x}\\ &= \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x \sin x}\\ &= \frac{\cos^2 x}{\cos x \sin x}\\ &= \frac{\cos x}{\sin x}\\ &= \cot x\end{aligned}$$

b) $\frac{\sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan x \sec x\,(1 + \sin x)$

$$\begin{aligned}\frac{\sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x} &= \frac{\sin x}{\cos x} \bullet \frac{1}{\cos x}(1 + \sin x)\\ &= \frac{\sin x}{\cos^2 x}(1 + \sin x)\\ &= \frac{\sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

c) $\cot\theta\,(\cot\theta + \tan\theta) = \operatorname{cosec}^2\theta$

$$\begin{aligned}\cot\theta\,(\cot\theta + \tan\theta) &= \cot^2\theta + \cot\theta\tan\theta\\ &= \cot^2\theta + 1\\ &= \operatorname{cosec}^2\theta\end{aligned}$$

d) $(1 + \tan^2\theta)(1 - \cos^2\theta) = \sec^2\theta - 1$

$$\begin{aligned}(1 + \tan^2\theta)(1 - \cos^2\theta) &= \sec^2\theta \bullet \sin^2\theta\\ &= \frac{1}{\cos^2\theta} \bullet \sin^2\theta\\ &= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\\ &= \tan^2\theta\\ &= \sec^2\theta - 1\end{aligned}$$

6. *a)* $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, où $n \in \mathbb{Z}$ ou

$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, où $n \in \mathbb{Z}$

b) $\theta = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, où $n \in \mathbb{Z}$ ou

$\theta = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$, où $n \in \mathbb{Z}$

c) $x = 1 - \pi$

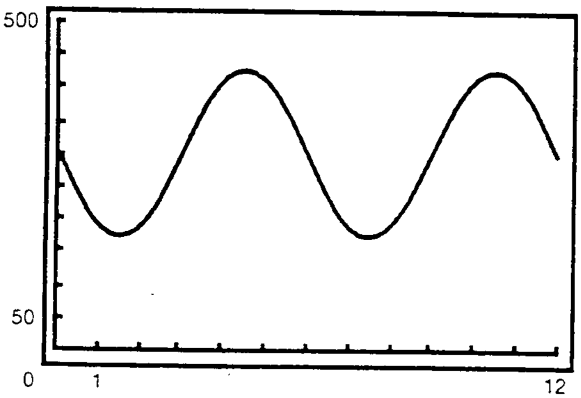
page 310

7. *a)* 4°C

   b) 2 h

   c) 1:30

8. *a)*



   b) 6 mois.

   c) 6 cycles.

9. (Autres réponses possibles.)

   $f(x) = {}^-15 \cos\left(\frac{\pi}{15}x\right) + 17$ ou

   $f(x) = 15 \sin \frac{\pi}{15}(x - 7{,}5) + 17$

page 312

Rencontre avec François Viète

$x = \frac{S + D}{2}$ et $y = \frac{S - D}{2}$