Planification
LES FONCTIONS EXPONENTIELLE ET LOGARITHMIQUE
Vision 4

COURS 1

ACTIVITÉ PLIAGE DE PAPIER (PARTIE 1)

Rappel des concepts de base, exposant et puissance

Question :
S'il était possible de plier une feuille en deux vingt fois, combien de rectangles seraient définis entre les plis?

RAPPEL : Les lois des exposants
Lecture : Les lois des exposants (Centre des ressources)

RAPPEL : Manipulation d'expressions algébriques
Lecture: Manuel Vision 4 P.229 (section du haut)

Lecture complémentaire : Manuel Vision 4 P.228

EXERCICES:
Manuel Visions 4 P.230 nos : 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11

COURS 2

ACTIVITÉ PLIAGE DE PAPIER (PARTIE 2)
Combien de pliages engendraient 32768 rectangles sur votre feuille?

INTRODUCTION AU LOGARITHME
Fichier sur le centre des ressources « Introduction au logarithme »

PRATIQUE DU PASSAGE DE LA NOTATION EXPONENTIELLE À LA NOTATION LOGARITHMIQUE ET VICE ET VERSA
Fichier inspiration « relations réciproques » sur le centre des ressources. Le corrigé de cette activité est aussi disponible sur le centre des ressources.

EXERCICES :

Manuel Visions 4 P.230 nos : 4, 6, 12, 13, 16, 17, 18, 19
Erreur du Corrigé : P.233 no 12 d) a=2

COURS 3

PROPRIÉTÉ DU CHANGEMENT DE BASE

Les calculatrices scientifiques standards ne permettent pas de calculer des logarithmes autres qu'en base 10. La touche « log » correspond donc à « $\log_{10}$ ». Ce choix a été fait en se basant sur le fait qu'une des propriétés des logarithmes permet de transformer n'importe quelle base en base 10.

<u>Propriété du changement de base :</u>

$$\log_c p = \frac{\log_x p}{\log_x c}$$

où c : ancienne base
p : puissance
x : nouvelle base de notre choix

La stratégie consiste à transformer notre base c en une nouvelle base de notre choix qui sera la base 10, car nous avons la base 10 sur notre calculatrice.

Ex.

$\log_2 8 = \dfrac{\log 8}{\log 2} = 3$ log 8 / log 2 peut être calculé sur votre calculatrice

N'oublie pas, la base 10 n'a pas à être écrite, donc log 8 et log 2 sont en réalité $\log_{10}8$ et $\log_{10}2$.

LA FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE

1) QUELQUES OBSERVATIONS SUR LES BASES ET LES EXPOSANTS

Objectif :
Plusieurs valeurs de base ou d'exposant ne peuvent servir à créer une fonction exponentielle continue. Cette activité te permettra de découvrir ces valeurs importantes dont il faudra tenir compte dans notre étude de la fonction exponentielle.

Activité :

1- Construis-toi un fichier Excel ou TI qui te permettra de faire varier la base ou l'exposant et
d'obtenir la puissance qui en résulte.

Rappel 1 : En notation « calculatrice », l'exposant est souvent symbolisé par l'accent circonflexe.

Ex. 2^3 *devra être écrit 2^3*

Rappel 2 : La racine carrée dans Excel s'écrit « =racine(nombre) »
Ex. $\sqrt{2}$ *s'écrit : « =racine(2) »*

2- Pour chacune des parties de l'activité, tu devras ajouter tes conclusions à tes notes de cours et tenter d'expliquer les raisons qui provoquent ces résultats.

Exemples de conclusions :
- Telle base où tel exposant donne un résultat impossible à calculer,
- Tel exposant donne toujours la même puissance,
- Lorsque la base est un entier positif, plus l'exposant est grand plus la valeur de la puissance est grande.

Pour les 3 premières parties de l'activité, une base vous sera assignée et vous devrez faire varier l'exposant de cette base selon les valeurs suivantes :
(-1.5 , -1 , -0.5 , 0 , 0.5 , 1 , 1.5)

ACTIVITÉS :

1) La base nulle (base = 0)

Détermine, lorsque la base est 0 et que l'exposant varie, la puissance obtenue.

Conclusion :

2) La base unitaire (base = 1)

Détermine, lorsque la base est 1 et que l'exposant varie, la puissance obtenue.

Conclusion :

3) La base négative (base < 0)
Détermine, lorsque la base est négative et que l'exposant varie, la puissance obtenue.

Conclusion :

Pour les trois dernières parties, nous maintiendrons la base à 2 et nous ferons varier l'exposant.

4) L'exposant négatif (exposant < 0)

Pour une base de 2, faire varier l'exposant selon les valeurs suivantes :
(-6, -5, -4, -3, -2, -1)

Conclusion :

5) L'exposant fractionnaire ou rationnel

Rappel : Un nombre rationnel est un nombre dont les décimales ne sont pas infinies (il ne faut pas considérer les zéros) ou infinies selon une période (nombre périodique).

Ex1. 2,324 (Les décimales sont un nombre fini, il y en a trois)
Ex.2 : 5,343434343434343434…(Les décimales sont infinies, mais toujours selon la même période, soit 34)

La forme étudiée devra être : $puissance = 2^{\frac{1}{n}}$
L'expression (1/n) permet de créer un nombre rationnel à la position d'exposant.

Le « n » de l'expression « 1/n » prendra les valeurs suivantes : -3, -2, -1, 1, 2, 3

Établis deux conclusions, une pour les exposants rationnels négatifs et une pour les exposants rationnels positifs.

6) L'exposant irrationnel

Rappel : Un nombre irrationnel est un nombre aux décimales illimitées et non périodiques
Ex. 3,43574526473983…

La forme étudiée devra être : $puissance = 2^{\sqrt{n}}$

,$\sqrt{n}$ permet de créer un exposant irrationnel, si « n » n'est pas un carré.
«n» prendra les valeurs suivantes : -3, -1, 2, 3, 5

Établis deux conclusions, une pour les exposants irrationnels négatifs et une pour les exposants irrationnels positifs.

Le corrigé de cette activité est disponible sur le centre des ressources

2) ACTIVITÉ GÉOGEBRA SUR LA FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE

Tracez, dans Geogebra, une fonction exponentielle de base ($y=c^x$) où «c» pourra être contrôlé par un bouton interactif. Servez-vous de cette construction pour répondre aux questions suivantes qui portent sur la fonction exponentielle de base.

1- Faites varier la valeur de c et déterminez quelles valeurs ne peuvent être utilisées pour créer une fonction exponentielle. *L'activité précédente vous a normalement déjà fourni la réponse à cette question.*

2- Quel est le domaine de cette fonction quelque soit la valeur de la base c ?

3- Quel est le codomaine de cette fonction quelque soit la valeur de la base c ?

4- Que remarques-tu de particulier au niveau de l'ordonnée à l'origine d'une fonction exponentielle de base? Explique d'où vient cette particularité.

5- La fonction de base peut-elle être entièrement croissante ? Si oui, sous quelle condition.

6- La fonction de base peut-elle être entièrement décroissante ? Si oui, sous quelle condition.

7- La fonction de base peut-elle être en partie croissante et en partie décroissante? Si oui, sous quelle condition.
8- Combien de zéros peut posséder une fonction exponentielle de base ?

9- La fonction exponentielle est-elle asymptotique ? Si oui, quelle est l'équation de l'asymptote de n'importe quelle fonction exponentielle de base.

10- Quel est le signe d'une fonction exponentielle de base?

11- Pour toutes les fonctions exponentielles de base, quelle est la particularité des points x=0, x=1 et x=-1 ?

Les réponses à ces questions représentent les notions importantes attachées à la fonction exponentielle de base. Ajoute-les à notes de cours et n'oublie pas de faire valider les questions dont tu n'es pas certain de tes réponses.

COURS 4

COMPOSITION DE LA RÈGLE D’UNE FONCTION EXPONENTIELLE À PARTIR D’UNE SITUATION CONCRÈTE

Fichier « Trouver la règle d’une fonction exponentielle associée à une situation concrète» (Centre des ressources)

EXERCICES :

Déterminer la règle d’une situation exponentielle (Centre des ressources)

COURS 5 et 6

1) COMMENT DÉTERMINER LA BASE D’UNE FONCTION EXPONENTIELLE À PARTIR D’UNE TABLE DE VALEUR

Réaliser l’activité suivante dans EXCEL

Découvrir la base à partir d’une série de puissances
Situation :

Certains concours sur Internet demandent aux participants, s’ils veulent être inscrits, d’envoyer les règles du concours à un certain nombre de leurs connaissances. Ces personnes devront faire de même s’ils veulent participer à leur tour. Dans la situation suivante, nous étudierons le nombre maximum de participants qui peuvent s’ajouter au concours, à partir de deux participants initiaux, si tout le monde, ayant reçu les règles de ces deux personnes, décide de participer et s’il n’est permis de participer qu’une seule fois, et ce,le lendemain de la réception du message. Pour participer, une personne doit envoyer le message contenant les règles du concours à trois autres personnes. Le jour zéro correspond à la réception du premier message par les deux personnes différentes dont leur participation fera naître deux chaînes de participants. Au jour 1, il y a donc six nouveaux participants (3 par chaîne) qui s’ajouteront au concours. Combien de nouveaux participants s’ajouteront au concours lors de la 10e journée ?

1) Créer un tableau Excel avec les colonnes suivantes : valeur initiale (a), base (c) et exposant (m). La base serait-elle le nombre de jours, le nombre de lettres envoyées par jour ou le nombre de lettres que chaque personne doit envoyer à d’autres ? Que représenteront la valeur initiale, la puissance et la base dans cette situation ?
2) Faire calculer les puissances (p) dans une quatrième colonne.
3) Créer une colonne où vous calculerez p_2/p_1, puis p3/p2, ainsi de suite.

4) Comparer les résultats de cette dernière colonne avec la colonne de la base.
5) Ajouter une colonne Δp pour calculer p_2-p_1, puis $p3-p2$, ainsi de suite…
6) Créer une colonne où vous calculerez $\Delta p_2/\Delta p_1$, puis $\Delta p_3/\Delta p_2$, ainsi de suite…
7) Comparer les résultats de cette dernière colonne avec la colonne de la base.

- Suite à cette activité, quelles sont les 2 façons, à partir d'une table de valeurs des puissances, de déterminer la base ?

Question :L'ajout d'un paramètre « k » empêche-t-il l'une de ces méthodes de fonctionner ?

Reprends la situation précédente, ajoute un paramètre « k » ($f(x) = ac^x + k$) et regarde l'influence de cette valeur sur chacune des méthodes.

- **Les deux méthodes précédentes fonctionnent-elles ? Quelle(s) méthode(s) permet de calculer la base, à partir d'une table de valeurs, de n'importe quelle fonction exponentielle ?**

- **Testons si tu as bien découvert la méthode, quelle est la base de chacune des tables de valeurs suivantes représentant des fonctions exponentielles.**

a)

x	y
2	90
3	65
4	52,5
5	46,25

b)

x	y
4	13,25
5	53,75
6	175,25
7	539,75

Corrigé :
a) c = ½ b) c = 3

Cette méthode ne sert pas qu'à trouver la base d'une fonction exponentielle, elle peut aussi servir à identifier si une table de valeurs représente un modèle exponentiel. En effet, en appliquant cette méthode pour deux séries de valeurs différentes, si vous n'obtenez pas la même base, c'est que la table de valeurs présente des données qui ne sont pas un modèle exponentiel.

2) FONCTIONS EXPONENTIELLES TRANSFORMÉES ($f(x) = ac^{b(x-h)} + k$)

Influence de la base et des paramètres sur la fonction transformée

Pour réaliser cette activité, construisez dans Geogebra une fonction exponentielle qui vous permettra de contrôler, par des boutons interactifs, les valeurs des paramètres a,b,h et k ainsi que celle de votre base c.

Influence de la base sur le tracé de la fonction

- Règle les paramètres de façon à obtenir la fonction de base associée à la base 2 (c=2, a=1, b=1, h=0, k=0).
- Fais varier la base « c » sans toucher aux autres paramètres et note tes observations. Tu dois faire ta variation pour chacune des zones suivantes :

1) c < 0
2) c entre 0 et 1
3) c = 1
4) c> 1

Influence du paramètre « a »

- Règle les paramètres de façon à obtenir la fonction de base associée à une base de ton choix.
- Fais varier ton paramètre « a » sans toucher aux autres paramètres et note tes observations. Tu dois faire ta variation pour chacune des zones suivantes :

1) a < 0
2) a =0
3) a > 0

Influence du paramètre « b »

- Règle les paramètres de façon à obtenir la fonction de base associée à une base de ton choix.
- Fais varier ton paramètre « b » sans toucher aux autres paramètres et note tes observations. Tu dois faire ta variation pour chacune des zones suivantes :

1) b < 0
2) b = 0
3) b > 0

Influence du paramètre « h »

- Règle les paramètres de façon à obtenir la fonction de base associée à une base de ton choix.
- Fais varier ton paramètre « h » sans toucher aux autres paramètres et note tes observations. Tu dois faire ta variation pour chacune des zones suivantes :

1) h < 0
2) h > 0

Influence du paramètre « k »

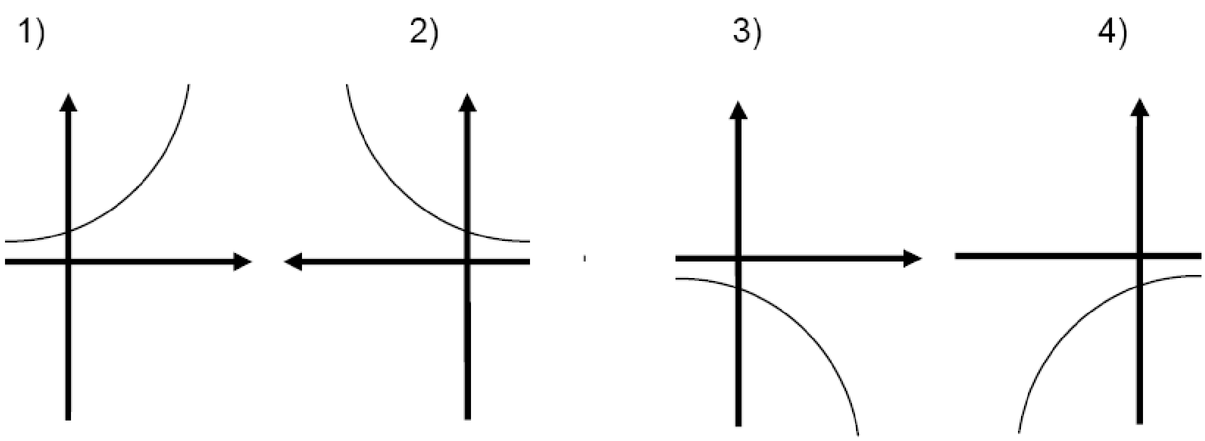
- Règle les paramètres de façon à obtenir la fonction de base associée à une base de ton choix.
- Fais varier ton paramètre « k » sans toucher aux autres paramètres et note tes observations. Tu dois faire ta variation pour chacune des zones suivantes :

1) k < 0
2) k > 0

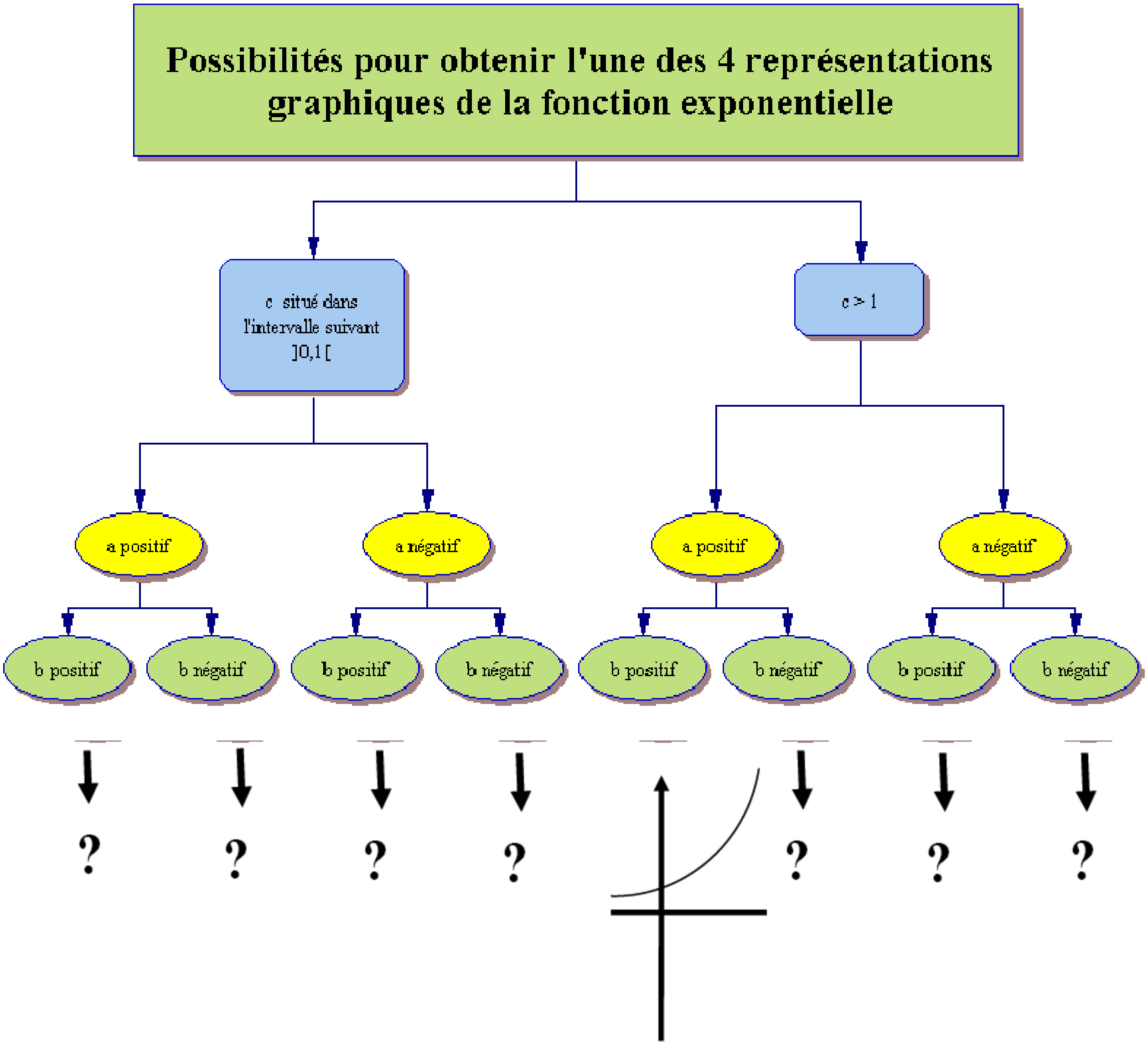
Après cette activité, tu as dû te rendre compte que la base et les paramètres ne pouvaient pas prendre n'importe quelle valeur. En effet, certaines valeurs, lorsqu'attribuées à la base ou aux paramètres, transforment la fonction exponentielle de façon à ce qu'elle n'existe plus ou qu'elle devienne un autre type de fonctions. Dresse la liste de ces valeurs interdites pour la base et chacun des paramètres.

3) L'ARBRE DES POSSIBILITÉS

La fonction exponentielle peut avoir quatre représentations visuelles différentes :



Ces quatre représentations dépendent du signe des paramètres a et b, mais aussi de la valeur de la base, comme vous l'avez vu dans l'activité précédente. Les paramètres h et k ne feront que déplacer horizontalement et verticalement ces représentations dans le plan cartésien. Servez-vous de votre fichier Geogebra de l'activité précédente pour compléter l'arbre des possibilités suivants :



Suite à cette activité :

a) Quelles sont les valeurs interdites pour la base «c» ?
b) Quelle est la valeur interdite pour le paramètre «a » ?
c) Quelle est la valeur interdite pour le paramètre «b » ?

THÉORIE : PASSAGE DE LA RÈGLE DE 4 À 3 PARAMÈTRES

Forme à 4 paramètres : $f(x) = ac^{b(x-h)} + k$

Par le propriété des exposants suivantes : $c^{a \cdot b} = (c^a)^b$

On peut écrire : $f(x) = a(c^b)^{(x-h)} + k$

En considérant (c^b) comme la nouvelle base c on obtient la forme à 3 paramètres suivantes :

$f(x) = ac^{(x-h)} + k$ où $c_3 = {c_4}^b$ c_3 = base dans la règle à 3 paramètres

c_4 = base dans la règle à 4 paramètres

Exercices :

Écris les règles suivantes à 3 paramètres :

a) $f(x) = 7(0,5)^{-2(x-10)} + 6$

b) $f(x) = 3(0,25)^{-0,5x+1} + 2$

c) $f(x) = -(3)^{4x-8} - 1$

Pour savoir si tes réponses sont exactes, utilise Geogebra pour dessiner dans un même graphique la règle à 4 paramètres et la règle à 3 paramètres. Si les deux courbes sont superposées, c'est donc qu'elles sont équivalentes et que tu as trouvé la bonne règle à trois paramètres.

EXERCICES:

Manuel Visions 4 P.241 nos : 2, 3 sauf c), 4 sauf e), 8, 15, 16,

COURS 7

DÉTERMINER LA RÈGLE D'UNE FONCTION EXPONENTIELLE

1. **À partir de l'asymptote horizontale, de l'ordonnée à l'origine et d'un autre point**
2. **À partir de 3 points consécutifs**
3. **À partir de 2 points et d'une information parmi cette liste : valeur de a, valeur de c ou valeur de k**

Préalable aux trois méthodes :

Théorie :

Lorsqu'on recherche la règle d'une fonction exponentielle, on recherche la **forme à 2 paramètres** :

$$f(x) = ac^x + k$$

Cette forme à 2 paramètres est équivalente à la forme à 3 paramètres $f(x) = ac^{x-h} + k$ par la manipulation suivante :

$$f(x) = ac^{x-h} + k = a(\frac{c^x}{c^h}) + k \quad \text{par la propriété} \quad (\frac{a^m}{a^n}) = a^{m-n}$$

On fixe ensuite $\frac{a}{c^h}$ comme le nouveau paramètre « a » et on obtient la forme :

$$f\,(x) = ac^x + k \qquad \text{où} \qquad a_{2\text{paramètres}} = \frac{a_{3\,\text{paramètres}}}{c^h}$$

Exercices :

Écris les règles suivantes à 2 paramètres :

a) $f(x) = 7(0,5)^{x-10} + 6$

b) $f(x) = 3(0,25)^{x+1} + 2$

c) $f(x) = -(3)^{x-8} - 1$

Pour savoir si tes réponses sont exactes, utilise Geogebra pour dessiner dans un même graphique la règle à 4 paramètres et la règle à 3 paramètres. Si les deux courbes sont superposées, c'est donc qu'elles sont équivalentes et que tu as trouvé la bonne règle à trois paramètres.

MÉTHODE 1 : À partir de l'asymptote horizontale, de l'ordonnée à l'origine et d'un autre point

Lecture Manuel Vision 4 p.240

MÉTHODE 2 : À partir de 3 points consécutifs

Dans la règle à 2 paramètres ($f(x)=ac^x+k$), il y 3 **valeurs inconnues** (a, c et k). Si nous connaissons **3 points consécutifs,** nous pourrons trouver la règle de la façon suivante :

1. On recherche la valeur de la base par la méthode découverte au cours 7.
2. On place les valeurs de x, y et c (trouver à l'étape 1) dans la règle $f\,(x) = ac^x + k$ pour deux points de la table de valeurs.
3. On trouve la valeur de a et de k, en se servant des deux règles, de l'étape 2 par substitution, comparaison ou réduction.

Exemple :

Nous cherchons à établir une règle qui permettra de calculer la valeur totale « y » des économies d'un individu en fonction du nombre de mois « x » depuis qu'une période de récession économique fut annoncée. Au moment de l'annonce, l'individu disposait d'un certain montant en action d'une compagnie. Ce montant chute d'un certain % à chaque mois depuis l'annonce. À ce placement s'ajoute un montant fixe dans le compte de l'individu.

Voici la table de valeur de cette situation :

mois écoulés	**Valeur des économies ($)**
3	13764,90
4	13529,60
5	13299,01

1. $c = \dfrac{f(x+2)-f(x+1)}{f(x+1)-f(x)} = \dfrac{13299,01-13529,60}{13529,60-13764,90} = 0,98$

Après cette étape, il est maintenant possible de créer un système de deux équations à deux inconnus.

2. point 1 :

$$y = ac^x + k$$
$$13764,90 = a(0,98)^3 + k$$

point 2 :

$$y = ac^x + k$$
$$13529,60 = a(0,98)^4 + k$$

3. Isolons k dans la première règle :

$$13764,90 = a(0,98)^3 + k$$
$$13764,90 - a(0,98)^3 = k$$

Par substitution introduisant la valeur de k dans la seconde règle :

$$13529,60 = a(0,98)^4 + k$$
$$13529,60 = a(0,98)^4 + 13764,90 - a(0,98)^3$$

4. Déterminons la valeur de « a » par la résolution de l'équation précédente :

$$13529,60 = a(0,98)^4 + 13764,90 - a(0,98)^3$$
$$13529,60 - 13764,90 = a(0,98^4 - 0,98^3)$$
$$\frac{13529,60 - 13764,90}{(0,98^4 - 0,98^3)} = a$$
$$\frac{-235,3}{-0,018824} = a$$
$$12500 = a$$

"a" a été isolé par une mise en évidence simple.

5. Servons-nous des coordonnées d'un point, ainsi que des deux valeurs déjà déterminées pour déterminer la valeur manquante.

$$y = ac^x + k$$

$$13764,90 = 12500(0,98)^3 + k$$

$$13764,90 - 12500(0,98)^3 = k$$

$$13764,90 - 11764,90 = k$$

$$2000 = k$$

6. Écrire la règle en laissant x et y sous forme de variable.

$$y = ac^x + k$$

$$y = 12500(0,98)^x + 2000$$

MÉTHODE 3 : À partir de 2 points et d'une information parmi cette liste : valeur de a, valeur de c ou valeur de k

Dans le cas où la table de valeurs ne nous présenterait pas trois points consécutifs, il faudrait absolument que l'une des variables suivantes, a, c et k soit connue afin de se créer un système de deux équations à deux inconnues.

EXERCICES:
Manuel Visions 4 P.241 nos : 1, 5, 6, 10, 12, 14, 17 et 18 sauf c) et d)

COURS 8

LA BASE NATURELLE

Plusieurs phénomènes naturels ont un comportement exponentiel. Plusieurs de ces phénomènes possèdent une base commune qui est un nombre décimal au développement infini. En mathématique, lorsqu'on doit souvent utiliser un nombre décimal au développement infini, on lui accorde une variable. L'exemple le plus connu est π. La variable de la base naturelle est e. La lettre e vient du nom Euler. En effet, le Suisse Leonard Euler est le mathématicien qui a montré l'importance de la base naturelle.

Comment déterminer la valeur de la base e

La valeur de la base e se trouve par la formule suivante pour un x qui tend vers l'infini.

$$e = (1 + \frac{1}{x})^{x}$$

Calcul la valeur de e pour un x égale aux valeurs suivantes : (10, 100, 1000, 10000, 100000 et 1000000)

Les calculs précédents te montrent que la valeur de e tend vers 2,718281… Tu comprends, qu'il devient alors beaucoup plus facile d'écrire e plutôt que ce chiffre. Comme π, tu trouveras la touche e sur ta calculatrice. Il te sera possible d'obtenir la valeur approximative de e en faisant e^1 sur ta calculatrice.

Chaque base possède un logarithme qui lui est associé, la base e ne fait pas exception, il est donc possible d'écrire $\log_e$, en réalité, on écrira alors ln, car $\log_e$ s'appelle le **l**ogarithme **n**aturel ou le **l**ogarithme **n**épérien. Le nom népérien vient du nom Neper, il s'agit en fait d'un hommage à John Napier ou John Neper qui a mis au point les logarithmes.

$\text{Log}_e\, x = \ln x$

La forme exponentielle $y=e^x$ s'écrira donc $x=\ln y$ sous forme de logarithme

Exercice:

Un biologiste installe une sonde de positionnement sur une oie blanche afin de créer une carte du chemin qu'elle parcourt durant sa migration automnale. La sonde possède une pile au lithium dont la puissance P, en watts, varie selon la fonction exponentielle suivante :

$P = 50e^{\frac{-j}{220}}$ où j est le nombre de jours écoulés depuis la mise en fonction de la sonde

a) Quelle est la puissance initiale de la pile ?
b) Quelle est la puissance de la pile après un an ?

Rép : a) 50 W b) 9,5 W

LA FONCTION LOGARITHMIQUE DE BASE

ACTIVITÉ GÉOGEBRA SUR LA FONCTION LOGARITHME DE BASE

Tracez, dans Geogebra, une fonction logarithmique de base ($y = \log_c x$) où «c» pourra être contrôlé par un bouton interactif. En réalité, geogebra ne permet pas de tracer une fonction logarithmique autre que dans les bases deux, décimale et naturelle, mais par la loi du changement de base, nous pouvons tracer son équivalent exprimé en base 10. Cet équivalent nous permettra de constater tout aussi bien l'influence du c sur le graphique de la fonction de base.

Par la loi du changement de base :

$y = \log_c x = \frac{\log x}{\log c}$ Il vous faut donc tracer dans Geogebra : $y = \frac{\log(x)}{\log(c)}$

Servez-vous de cette construction pour répondre aux questions suivantes qui portent sur la fonction logarithmique de base.

1- Faites varier la valeur de c et déterminez quelles valeurs ne peuvent être utilisées pour créer une fonction logarithmique.

2- Quel est le domaine de cette fonction quelque soit la valeur de la base c ?

3- Quel est le codomaine de cette fonction quelque soit la valeur de la base c ?

4- Que remarques-tu de particulier au niveau de l'abscisse à l'origine d'une fonction logarithmique de base? Explique d'où vient cette particularité.

5- La fonction de base peut-elle être entièrement croissante ? Si oui, sous quelle condition.

6- La fonction de base peut-elle être entièrement décroissante ? Si oui, sous quelle condition.

7- La fonction de base peut-elle être en partie croissante et en partie décroissante? Si oui, sous quelle condition.

8- Combien de zéros peut posséder une fonction logarithmique de base ?

9- La fonction logarithmique est-elle asymptotique ? Si oui, quelle est l'équation de l'asymptote de n'importe quelle fonction logarithmique de base?

10- Quel est le signe d'une fonction logarithmique de base?

11- Pour toutes les fonctions logarithmiques de base, quelle est la particularité des points x=1, x=c et $x=c^{-1}$?

12- Quel est le lien entre les points de la question 11 et les points particuliers de la fonction exponentielle de base (x=0, x=1 et x=-1)

13- Ta réponse à la question précédente t'éclaire-t-elle sur la relation qui peut exister entre une fonction exponentielle de base et une fonction logarithmique de base ?

Les réponses à ces questions représentent les notions importantes attachées à la fonction logarithmique de base. Ajoute-les à notes de cours et n'oublie pas de faire valider les questions dont tu n'es pas certain de tes réponses.

EXERCICES:

Manuel Visions 4 p.241 nos : 3 c), 4 e), 9, 11, 13
P.252 nos : 1, 2 et 3

COURS 9

MISSION CELI OU REER COURS 1

- Théorie par l'enseignant
- Lecture du document de mission (Centre des ressources)
- Travail sur la mission

COURS 10

MISSION CELI OU REER COURS 2

- Travail sur la mission

COURS 11

Zéro d'une fonction exponentielle

Il est possible de déterminer si une fonction possède un zéro ou pas en regardant ses paramètres comme nous l'avons vu dans les fonctions précédentes. Par contre, pour la fonction exponentielle, nous avons aussi la base qui influencera l'allure du graphique.

Réponds aux questions suivantes, au besoin fais des tests dans Geogebra :

1) La base « c » a-t-elle un impact sur le fait qu'une fonction exponentielle a des zéros ou non ?
2) Quels paramètres doivent être regardés pour déterminer si une fonction exponentielle possède des zéros ?
3) Quelles conditions devront respecter les paramètres de la question 2) pour qu'une fonction exponentielle possède des zéros ?

Une fois que nous sommes certain que notre fonction possède un zéro, il faut suivre cette méthode pour en trouver la valeur. Nous ferons un exemple avec la fonction suivante :

$$f(x) = -20\ (0,2)^{2x+6}+8$$

1- Égaler notre fonction avec la droite y=0, car c'est l'équation de l'axe des « x ».

$-20\ (0,2)^{2x+6}+8 = 0$

2- Isoler la base et son exposant

a) Enlever « k »

$-20\ (0,2)^{2x+6} = -8$

b) Enlever « a »

$(0,2)^{2x+6} = -8/-20$

$(0,2)^{2x+6} = 0,4$

Important : Nos activités des premiers cours nous ont montré qu'il est impossible d'engendré une puissance négative dans le contexte d'une fonction exponentielle. Dans un tel cas, si par exemple nous obtenions une puissance de -0,4 au lieu de 0,4, cela nous indiquerait une impossibilité, donc que notre fonction ne peut être égalée à zéro, en d'autres mots, qu'elle ne possède pas de zéro.

3- Isoler l'exposant en écrivant la forme exponentielle sous forme logarithmique

$\text{Log}_{0,2}\, 0{,}4 = 2x+6$

4- Si le log n'est pas en base décimale(10) ou en base naturelle(*e*), utilisez la loi du changement de base pour transférer votre base dans l'une de ces bases afin de calculer la valeur du logarithme sur votre calculatrice.

Loi du changement de base : $\log_c p = \dfrac{\log_x p}{\log_x c}$

où c : ancienne base
p : puissance
x : nouvelle base de notre choix

Ce qui nous donne en appliquant cette loi :

$\dfrac{\log 0,4}{\log 0,2} = 0,5693$ ou $\dfrac{\ln 0,4}{\ln 0,2} = 0,5693$

5- Déterminer la valeur de x

0,5693 = 2x + 6
0,5693 – 6 = 2x
-5,4307 / 2 = x
-2,7153 = x

Pour cette équation x vaut approximativement -2,7153 quand y vaut 0.

Exercice :
Trouver le zéro de la fonction suivante : $f(x)=2(3)^{3x+5}-30$
Rép :-0,845

Point de rencontre entre une fonction exponentielle et une droite constante.

Il s'agit ici d'appliquer la même méthode, mais au lieu d'égaler l'équation à y=0 on l'égalise avec l'équation de la droite constante dont on veut déterminer le point de rencontre avec notre fonction exponentielle.

Ex. Trouver le point de rencontre entre $f(x) = -20\ (0,2)^{2x+6}+8$ et $y=4$

1- Égaler notre fonction avec la droite y=4

$-20\ (0,2)^{2x+6}+8 = 4$

2- Isoler la base et son exposant

a. Enlever « k »
$-20\ (0,2)^{2x+6} = -4$

b. Enlever « a »
$(0,2)^{2x+6} = -4/-20$
$(0,2)^{2x+6} = 0,2$

3- Isoler l'exposant en écrivant la forme exponentielle sous forme logarithmique

$\text{Log}_{0,2}\, 0,2=2x+6$

4- Si le log n'est pas en base décimale(10) ou en base naturelle(*e*), utilisez la loi du changement de base pour transférer votre base dans l'une de ces bases.

$\frac{\log 0,2}{\log 0,2}=1$ ou $\frac{\ln 0,2}{\ln 0,2}=1$

5- Déterminer la valeur de x

1 = 2x + 6
1 – 6 = 2x
-5 / 2 = x
-2,5 = x

Le point de rencontre a donc comme coordonnées (-2.5 , 4)

EXERCICES:
Manuel Visions 4 p.266 nos : 3, 7 a), c) et d), 10, 12 a) et b), 13 et 15

COURS 12

La fonction logarithmique transformée

Après avoir étudié la fonction logarithme de base au cours 8, étudions maintenant la fonction logarithme transformée dont la règle est :

$$y = a \log_c (b(x-h))+k$$

À l'aide du fichier Cabrigéomètre placé sur le centre des ressources ou d'une fonction interactive créée dans TI-Interactive réalisez l'activité suivante qui vous permettra de comprendre l'effet des paramètres et de la base sur le graphique de la fonction logarithmique de base.

N.B. Malheureusement, je n'ai pas encore trouvé comment dessiner une fonction qui n'est pas en base décimale ou naturelle sur Geogebra.

ACTIVITÉ :

Influence de la base sur le tracé de la fonction logarithmique

Fais varier la base « c » sans toucher aux autres paramètres et note tes observations.

Tu dois faire ta variation pour chacune des zones suivantes :
1) $c < 0$
2) c entre 0 et 1
3) $c = 1$
4) $c > 1$

Influence du paramètre « a »

Fais varier ton paramètre « a » sans toucher aux autres paramètres et note tes observations.

Tu dois faire ta variation pour chacune des zones suivantes :
1) $a < 0$
2) $a = 0$
3) $a > 0$

Influence du paramètre « b »

Fais varier ton paramètre « b » sans toucher aux autres paramètres et note tes observations.

Tu dois faire ta variation pour chacune des zones suivantes :
1) $b < 0$
2) $b = 0$
3) $b > 0$

Influence du paramètre « h »

Fais varier ton paramètre « h » sans toucher aux autres paramètres et note tes observations.

Tu dois faire ta variation pour chacune des zones suivantes :
1) $h < 0$
2) $h > 0$

Influence du paramètre « k »

Fais varier ton paramètre « k » sans toucher aux autres paramètres.

Tu dois faire ta variation pour chacune des zones suivantes :
1) $k < 0$
2) $k > 0$

Après cette activité, tu as dû te rendre compte que la base et les paramètres ne pouvaient pas prendre n'importe quelle valeur. En effet, certaines valeurs, lorsqu'attribuées à la base ou aux paramètres, transforment la fonction logarithmique en une autre fonction, telle une droite, ou annulent complètement la fonction. Dresse la liste de ces valeurs interdites pour la base et chacun des paramètres.

Suite à cette activité, identifie le paramètre influençant la position de l'asymptote d'une fonction logarithmique. Quelle est l'équation définissant l'asymptote d'une fonction logarithmique transformée?

Trouver l'équation de la réciproque d'une fonction logarithmique

Comme les activités des cours précédents ton fais découvrir, les fonctions exponentielle et logarithme sont réciproque l'une de l'autre. Voici comment trouver la réciproque exponentielle d'une fonction logarithmique transformée :

Exemple : Détermine la réciproque de $y = 4 \log (2(x+5)) - 2$

Étape 1 : Inverser x et y

x = 4 log (2(y+5)) – 2

Étape 2 : Isoler le log

a) Enlever « k »

x + 2 = 4 log (2(y+5))

b) enlever « a »

$$\frac{x+2}{4} = \log(2(y+5))$$

$$0,25(x+2) = \log(2(y+5))$$

Étape 3 : Écrire sous forme exponentielle

$$10^{0,25(x+2)} = 2(y+5)$$

Étape 4 : Isoler y

$$10^{0,25(x+2)} = 2(y+5)$$

$$\frac{10^{0,25(x+2)}}{2} = y+5$$

$$0,5 \cdot 10^{0,25(x+2)} = y+5$$

$$0,5 \cdot 10^{0,25(x+2)} - 5 = y$$

$$y = 0,5 \cdot 10^{0,25(x+2)} - 5$$

Recherche de la règle f(x) = $\log_c$ b(x-h) d'une fonction logarithmique à partir de l'asymptote, l'abscisse à l'origine et un point

Il s'agit ici de reprendre généralement la méthode vue avec la fonction exponentielle, en considérant certaines différences :

1) L'asymptote donne cette fois-ci la valeur du h, contrairement à celle de la fonction exponentielle qui donnait la valeur du k.

2) Cette fois-ci nous devrons trouver la valeur du b plutôt que du a en nous servant de l'abscisse à l'origine plutôt que de l'ordonnée à l'origine
3) Comme pour la fonction exponentielle, le point nous servira à trouver la valeur de la base c.

<u>Exemple :</u>

Détermine la règle de la fonction suivante :

x	y
4	0
56	3

Asymptote : x=2

1- Déterminer la valeur de h

Pour une fonction logarithmique, l'équation de l'asymptote est x=h, donc dans ce cas-ci h=2

2- Déterminer la valeur du paramètre b grâce à l'abscisse à l'origine

Comme l'abscisse à l'origine est la valeur de x quand y vaut 0, nous pouvons remarquer la présence de ce point dans la table de valeurs, soit le point (4,0).

On entre h et l'abscisse à l'origine dans la règle,

$$y = \log_c b(x-h)$$
$$0 = \log_c b(4-2)$$
$$0 = \log_c b(2)$$

Puis, on passe sous forme exponentielle et on isole la valeur de b,

$$0 = \log_c b(2)$$
$$c^0 = 2b$$
$$1 = 2b$$
$$\frac{1}{2} = b$$

3- Déterminer la valeur de c

On entre h, b et notre autre point dans la règle

$$y = \log_c \frac{1}{2}(x-h)$$
$$3 = \log_c \frac{1}{2}(56-2)$$
$$3 = \log_c \frac{1}{2}(54)$$
$$3 = \log_c 27$$

Puis, on passe sous forme exponentielle et on isole la valeur de b,

$$3 = \log_c 27$$
$$c^3 = 27$$
$$c = \sqrt[3]{27}$$
$$c = 3$$

4- On écrit la règle en remplaçant b,h et c puis en laissant x et y sous forme de variable.

$$y = \log_c b(x-h)$$
$$y = \log_3 \frac{1}{2}(x-2)$$

EXERCICES:
Manuel Visions 4 p.252 nos : 3 à 6, 8, 13 à 16 et 17

Erreur dans le manuel :
P.253 no 6 b) le point est (-6, 3) pas (-6, -3)
Erreur dans le corrigé du manuel :
P.253 no 13 a) 1) 4,93°C 2) 37°C 3) 91,5°C

COURS 13

Zéro d'une fonction logarithmique

Les paramètres et la base ont-ils de l'influence sur la présence ou non d'un zéro pour la fonction logarithmique ?

Voici la méthode à suivre pour trouver le zéro d'une fonction logarithmique :

Prenons l'exemple de la fonction : y = 2 ln(-3x+13) + 4

1- Égaler notre fonction avec la droite y=0, car c'est l'équation de l'axe des « x ».

$2 \ln(-3x+13) + 4 = 0$

2- Isoler le logarithme

a) Commencer par enlever le « k »

$2 \ln(-3x+13) = -4$

b) Puis, enlever le a

$\ln(-3x+13) = -4/2$
$\ln(-3x+13) = -2$

3- Écrire l'équation sous forme exponentielle

$e^{-2}=-3x+13$

4- Isoler et trouver la valeur de x

$-3x = e^{-2} - 13$

$$x=\frac{e^{-2}-13}{-3}$$
$$x = 4.28822$$

Point de rencontre entre une fonction exponentielle et une droite constante.

Il s'agit ici d'appliquer la même méthode, mais au lieu d'égaler l'équation à y=0 on l'égalise avec l'équation de la droite constante dont on veut déterminer le point de rencontre avec notre fonction exponentielle.

Ex. Trouver le point de rencontre entre $y = 3 \log(-x+4) + 3$ et $y=9$

1- Égaler notre fonction avec la droite y=9.

$3 \log(-x+4) + 3 = 9$

2- Isoler le logarithme

a) Commencer par enlever le « k »

$3 \log(-x+4) = 6$

b) Puis, enlever le a

$\log(-x+4) = 6 / 3$
$\log(-x+4) = 2$

3- Écrire l'équation sous forme exponentielle

$10^2=-x+4$

4- Isoler et trouver la valeur de x

$-x = 10^2 – 4$
$-x = 96$
$x = -96$

Le point de rencontre entre les deux fonctions est le point (-96 , 9)

EXERCICES:
Manuel Visions 4 p.266 nos : 5, 7 b), e) et f), 20

P.267 no 10 Signe de f^{-1}
La fonction est négative du zéro à l'asymptote exclue donc: [2,7 , 3[

COURS 14

Préparation à l'examen

Manuel Visions 4 p.276 nos : 4, 6, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 19, 22 à 24 et 29

COURS 15 et 16

ÉVALUATION CD1

Enrichissements non réalisés :

- Propriétés des logarithmes
- Point de rencontre entre une fonction exponentielle et une autre fonction qu'une droite constante.
- Point de rencontre entre une fonction exponentielle et une autre fonction qu'une droite constante.