Les vecteurs

RÉVISION 5

Réactivation 1

Page 4

a. **1)** Le sinus de cet angle aigu. **2)** Le cosinus de cet angle aigu.
3) La tangente de cet angle aigu.

b. **1)** $2,5 \div \tan 1° \approx 143,22$ cm **2)** $2,5 \div \tan 5° \approx 28,58$ cm

c. **1)** $2 \arctan \frac{1,5}{30} \approx 5,72°$ **2)** $2 \arctan \frac{1,5}{2000} \approx 0,09°$

d. **1)** Les pixels sont indiscernables pour des distances supérieures à environ 24,06 m.
2) $\approx 111,7$ km

Mise à jour

Page 7

1. **a)** m $\angle A \approx 44,96°$ **b)** m $\angle A \approx 60,64°$ **c)** m $\angle A \approx 30,57°$ **d)** m $\angle A \approx 59,52°$

2. **a)** m $\angle C = 34°$ m $\overline{BC} \approx 10,20$ cm m $\overline{AB} \approx 6,88$ cm
b) m $\angle D = 57°$ m $\overline{DE} \approx 6,71$ cm m $\overline{DF} \approx 3,66$ cm
c) m $\angle H = 30°$ m $\overline{HI} \approx 7,79$ cm m $\overline{GI} = 4,5$ cm
d) m $\angle J = 20°$ m $\overline{JL} \approx 12,22$ cm m $\overline{KL} \approx 4,45$ cm
e) m $\angle N = 65°$ m $\overline{MO} \approx 5,10$ cm m $\overline{NO} \approx 2,38$ cm
f) m $\angle P = 45°$ m $\overline{PQ} \approx 0,49$ cm m $\overline{PR} = 0,35$ cm

3.

Pente (%)	Inclinaison (°)
2	**≈ 1,15**
≈ 5,24	3
6	**≈ 3,43**
≈ 8,75	5
10	**≈ 5,71**
≈ 17,63	10

Mise à jour (*suite*)

Page 8

4. **a)** **1)** cos B ou sin A. **2)** sin B ou cos A. **3)** tan A **4)** tan B
b) **1)** Vrai. **2)** Vrai. **3)** Faux. **4)** Faux.

5.

	Longueur de la cathète adjacente à l'angle A (cm)	Longueur de la cathète opposée à l'angle A (cm)	Longueur de l'hypoténuse (cm)	Mesure de l'angle A (°)	Mesure de l'angle B (°)
Triangle 1	43	**≈ 34,29**	55	**≈ 38,57**	**≈ 51,43**
Triangle 2	**≈ 5,20**	3	**6**	30	**60**
Triangle 3	1,5	1,5	**≈ 2,12**	**45**	**45**
Triangle 4	**≈ 28,98**	23	37	**≈ 38,43**	**≈ 51,57**
Triangle 5	**≈ 25,66**	**≈ 21,53**	33,5	**40**	50
Triangle 6	103	102	**≈ 144,96**	**≈ 44,72**	**≈ 45,28**

6. a) **1)** $\approx 4{,}76$ cm **2)** $\approx 3{,}1$ cm

b) **1)** $\approx 7{,}09$ cm **2)** $\approx 8{,}89$ cm

c) **1)** $\approx 75{,}96°$ **2)** $\approx 79{,}11°$

Mise à jour (*suite*) **Page 9**

7. Puisqu'il s'agit d'un triangle rectangle, il est possible de poser l'équation ci-dessous.

$\tan 75° = \frac{\text{distance franchie}}{20} \Rightarrow \text{distance franchie} = 20 \times \tan 75°$, soit $\approx 74{,}64$ m.

La campeuse a donc tort.

8. Hypoténuse du triangle ayant un angle de 63° : $\approx 4{,}49$ m.
Hypoténuse du triangle ayant un angle de 54° : $\approx 8{,}51$ m.
Aire du toit : $(4{,}49 + 8{,}51) \times 15 \approx 195$ m^2.
Avec les pertes de matériau, il faut acheter $195 + 195 \times 0{,}05$, soit environ 204,75 m^2 de bardeau d'asphalte.
Il en coûte environ $204{,}75 \times 50$, soit environ 10 237,50 $ pour couvrir le toit de cette maison.

9. a) $T \approx 13{,}35$ m **b)** $d \approx 23{,}12$ m

c) $T = d\tan 30° + h$ **d)** $T = d\tan 45° + h$
$= d(1) + h$
$= d + h$

Mise à jour (*suite*) **Page 10**

10. a) Apothème de la pyramide : $7 \div \cos 10° \approx 7{,}11$ cm.
Côté de la base : $2 \times 7 \times \tan 10° \approx 2{,}47$ cm.
1) Aire totale de la pyramide : $2{,}47^2 + 4 \times 2{,}47 \times 7{,}11 \div 2 \approx 41{,}22$ cm^2.
2) Volume de la pyramide : $2{,}47^2 \times 7 \div 3 \approx 14{,}24$ cm^3.

b) Hauteur du cône : $2 \times \cos 8° \approx 1{,}98$ m.
Rayon de la base : $2 \times \sin 8° \approx 0{,}28$ m.
1) Aire totale du cône : $\pi \times 0{,}28^2 + 2 \times \pi \times 0{,}28 \approx 1{,}99$ m^2.
2) Volume du cône : $\pi \times 0{,}28^2 \times 1{,}98 \div 3 \approx 0{,}16$ m^3.

11. a) $\approx 4{,}12$ cm

b) **1)** $\approx 0{,}01°$ **2)** $\approx 0{,}05°$

c) Déviation horizontale : $5000 \times \tan 0{,}1° \approx 8{,}72$ cm.
Déviation verticale : $5000 \times \tan 0{,}08° \approx 6{,}98$ cm.
Distance entre le point d'impact de la balle et le centre de la cible : $\sqrt{8{,}72^2 + 6{,}98^2} \approx 11{,}18$ cm.

Mise à jour (*suite*) **Page 11**

12. a) Longueur de l'escalier : $2 \div \tan 25° \approx 4{,}29$ m.
Nombre minimal de marches : $2 \div 0{,}1 = 20$ marches.
Profondeur d'une marche : $429 \div 20 \approx 21{,}45$ cm.
Il y aura 20 marches d'une hauteur de 10 cm et d'une profondeur d'environ 21,45 cm.

b) Longueur de l'escalier : $2 \div \tan 30° \approx 3{,}46$ m.
Nombre maximal de marches : 25 marches.
Profondeur d'une marche : $346 \div 25 \approx 13{,}84$ cm.
Hauteur d'une marche : $200 \div 25 \approx 8$ cm.
Il y aura 25 marches d'une hauteur de 8 cm et d'une profondeur d'environ 13,84 cm.

13. a) **1)** Rayon de la surface éclairée : $5 \times \tan 25° \approx 2{,}33$ m.
Aire de la surface éclairée : $\pi \times 2{,}33^2 \approx 17{,}08$ m^2.
La mesure de la surface éclairée est environ de 17,08 m^2.

2) Rayon de la surface éclairée : $10 \times \tan 25° \approx 4,66$ m.
Aire de la surface éclairée : $\pi \times 4,66^2 \approx 68,31$ m^2.
La mesure de la surface éclairée est environ de 68,31 m^2.

b) 1) Rayon de la surface éclairée : $\sqrt{2 \div \pi} \approx 0,80$ m.
Distance entre la lampe de poche et le mur : $0,80 \div \tan 25° \approx 1,71$ m.
La lampe de poche est située à environ 1,71 m du mur.

2) Rayon de la surface éclairée : $\sqrt{3 \div \pi} \approx 0,98$ m.
Distance entre la lampe de poche et le mur : $0,98 \div \tan 25° \approx 2,10$ m.
La lampe de poche est située à environ 2,10 m du mur.

c) Si r représente le rayon de la surface éclairée et d, la distance qui sépare la lampe de poche du mur, on a $r = d\tan 25°$. On en déduit que la mesure de la surface éclairée est de :
$A_1 = \pi r^2 = \pi(d\tan 25°)^2$
Si la distance double, on peut remplacer d par $2d$ dans la formule précédente et on obtient :
$A_2 = \pi(2d\tan 25°)^2 = 4\pi(d\tan 25°)^2 = 4A_1$
La mesure de la surface éclairée a donc quadruplé.

14. a) Périmètre $= a + b + b\cos x + a\cos y$

b) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* Aire $= \dfrac{(b\cos x + a\cos y) \times a\sin y}{2}$

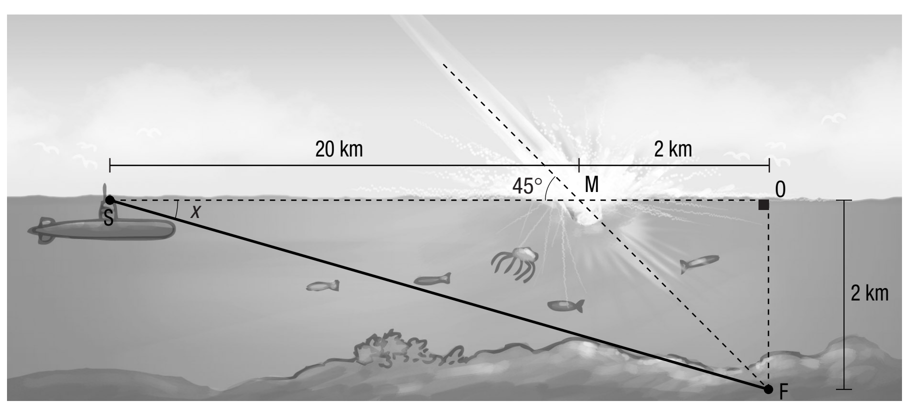
15. a) m $\overline{AG} = \sqrt{(2x)^2 + (3x)^2} = \sqrt{13}x$
m $\overline{AE} = \sqrt{(\sqrt{13}x)^2 + x^2} = \sqrt{14}x$
La longueur du segment AE correspond à l'expression $\sqrt{14}x$.

b) $\tan\angle \text{GAE} = \dfrac{x}{\sqrt{13}x} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}$
m $\angle$ GAE $= \arctan\dfrac{1}{\sqrt{13}}$, soit $\approx 15,50°$.
La mesure de l'angle GAE est environ de 15,50°.

SECTION 5.1 Les caractéristiques d'un vecteur

Problème **Page 12**

Voici une représentation graphique de la situation :



Puisque m $\angle$ OMF = 45°, le triangle OMF est isocèle et m $\overline{OM}$ = 2 km.
Puisque le triangle SOF est rectangle, on a :

- m $\overline{SF} = \sqrt{(\text{m }\overline{SM} + \text{m }\overline{MO})^2 + (\text{m }\overline{OF})^2} = \sqrt{22^2 + 2^2}$, soit $\approx 22,09$ km ;
- $x = \arctan\dfrac{2}{22}$, soit $\approx 5,19°$.

Puisque la distance doit être franchie en 2 h, le sous-marin doit se déplacer à une vitesse de $\dfrac{22,09}{2}$, soit environ de 11,05 km/h.
En conclusion, le sous-marin doit se déplacer pendant 2 h à une vitesse d'environ 11,05 km/h en suivant un angle de plongée d'environ 5,19° mesuré dans le sens horaire par rapport à l'horizontale.

Activité 1

Page 13

a. Ces renseignements n'indiquent pas l'orientation du déplacement de chaque drone.

b. **1)** Bien qu'on sache que les deux drones se déplacent dans une même direction, on ne connaît pas le sens du déplacement de chacun.

2) On doit aussi connaître le sens dans lequel chaque drone se déplace.

c. ① Oui, car les drones se déplacent l'un vers l'autre.

② Non. Les drones se déplacent à la même vitesse et dans le même sens. Le drone de gauche ne rattrapera donc jamais le drone de droite.

③ Oui, car le drone de gauche a une vitesse supérieure à celle du drone de droite et ils se déplacent dans le même sens. Le drone de gauche finira donc par rejoindre le drone de droite.

Activité 2

Page 14

a. **1)** Des vecteurs équipollents sont des vecteurs qui ont la même grandeur et la même orientation. Ce sont des vecteurs identiques.

2) Des vecteurs opposés sont des vecteurs qui ont la même grandeur, la même direction mais un sens opposé.

3) Des vecteurs colinéaires sont des vecteurs qui ont la même direction.

b. Il y a huit vecteurs différents.

Activité 2 (*suite*)

Page 15

c. **1)** Le vecteur jaune et le vecteur gris.

2) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* Le vecteur jaune et le vecteur noir.

3) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* Le vecteur gris et le vecteur vert.

d. Pour chaque vecteur, on obtient le premier nombre du couple en soustrayant l'abscisse de l'origine de la flèche de l'abscisse de la pointe de la flèche, et le second nombre du couple, en soustrayant l'ordonnée de l'origine de la flèche de l'ordonnée de la pointe de la flèche.

e. **1)** $(2, 4)$ **2)** $(2, 4)$ **3)** $(-2, -4)$ **4)** $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

f. **1)** $\sqrt{4^2 + 5^2} \approx 6{,}40$ u **2)** $\arctan \frac{5}{4} \approx 51{,}34°$

Activité 3

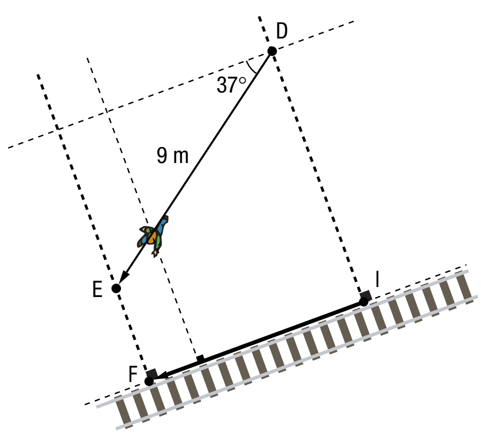
Page 16

a. **1)** Le triangle ABC est un triangle rectangle.

2) Le cadreur parcourt $11 \times \cos 31° \approx 9{,}43$ m.

3) Le cadreur se déplace à une vitesse de $11 \times \cos 31° \div 5 \approx 1{,}89$ m/s.

b.



c. **1)** Le cadreur parcourt $9 \times \cos 37° \approx 7{,}19$ m.

2) Le cadreur se déplace à une vitesse de $9 \times \cos 37° \div 7 \approx 1{,}03$ m/s.

Technomath

a. Leur origine est située aux mêmes endroits, soit A(3, 2).

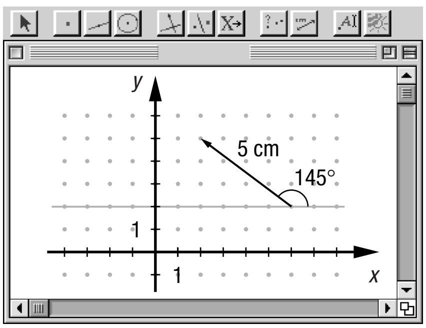
b. Écran **2** : **1)** ≈ 3 **2)** 3 Écran **3** : **1)** ≈ −4 **2)** −4 Écran **4** : **1)** ≈ 1 **2)** 1

c. Si l'orientation d'un vecteur AB correspond à l'angle mesuré dans le sens antihoraire qu'il forme avec l'horizontale, la différence entre les abscisses des points B et A correspond à la distance entre les points A et B multipliée par le cosinus de l'orientation de ce vecteur.

d. Écran **2** : **1)** ≈ 2 **2)** 2 Écran **3** : **1)** ≈ 2 **2)** 2 Écran **4** : **1)** ≈ −4 **2)** −4

e. Si l'orientation d'un vecteur AB correspond à l'angle mesuré dans le sens antihoraire qu'il forme avec l'horizontale, la différence entre les ordonnées des points B et A correspond à la distance entre les points A et B multipliée par le sinus de l'orientation de ce vecteur.

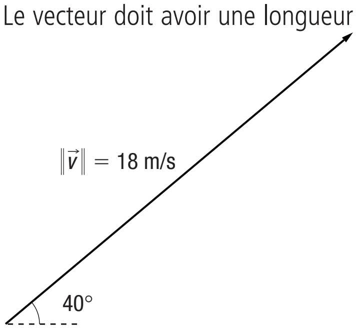
f.



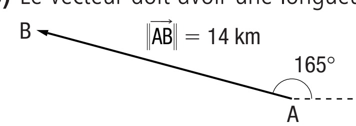
Mise au point 5.1

1. a) Une grandeur vectorielle. **b)** Une grandeur scalaire. **c)** Une grandeur vectorielle.
d) Une grandeur vectorielle. **e)** Une grandeur scalaire.

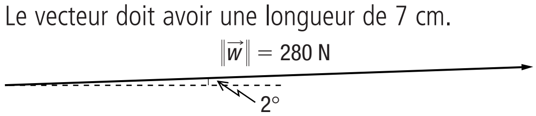
2. a) Le vecteur doit avoir une longueur de 6 cm.



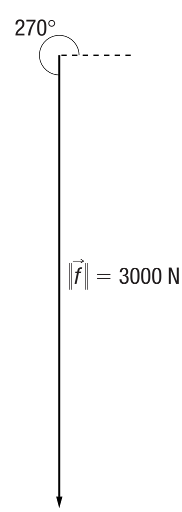
b) Le vecteur doit avoir une longueur de 3,5 cm.



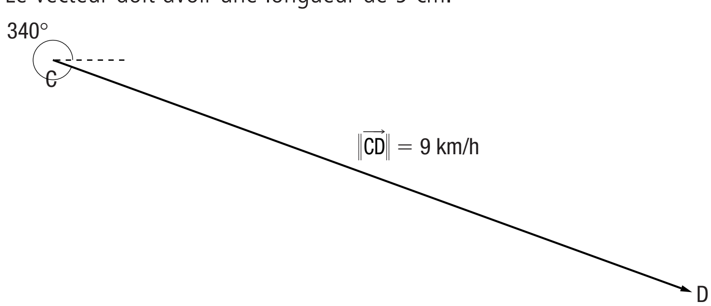
c) Le vecteur doit avoir une longueur de 7 cm.



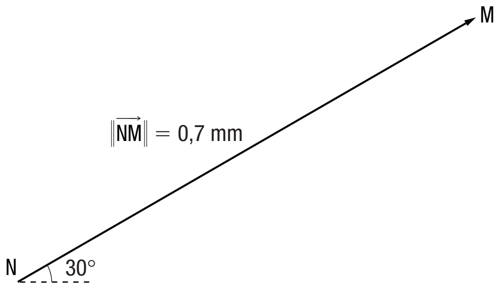
d) Le vecteur doit avoir une longueur de 6 cm.



e) Le vecteur doit avoir une longueur de 9 cm.



f) Le vecteur doit avoir une longueur de 7 cm.



3. a) 1) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$. **2)** *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$.

b) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{MN}$.

c) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ainsi que $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{KL}$.

Mise au point 5.1 (*suite*)

Page 22

4. a) $\approx (3{,}21,\ 3{,}83)$ **b)** $\approx (-35,\ 60{,}62)$ **c)** $\approx (8{,}16,\ -9{,}73)$

d) $\approx (-786{,}65,\ -2161{,}29)$ **e)** $(0,\ -0{,}5)$ **f)** $\approx (-0{,}82,\ -0{,}57)$

g) $\approx (-8{,}19,\ -5{,}74)$ **h)** $\approx (176{,}78,\ 176{,}78)$

5. a) $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$; orientation : 45°. **b)** $\|\vec{w}\| = 2\sqrt{13}$; orientation : $\approx$ 56,31°.

c) $\|\vec{u}\| = 4\sqrt{10}$; orientation : $\approx$ 18,43°. **d)** $\|\vec{s}\| = \sqrt{178}$; orientation : $\approx$ 102,99°.

e) $\|\vec{t}\| = \sqrt{106}$; orientation : $\approx$ 240,95°. **f)** $\|\vec{m}\| = \sqrt{106{,}25}$; orientation : $\approx$ 284,04°.

g) $\|\vec{n}\| = \sqrt{4{,}04}$; orientation : $\approx$ 95,71°. **h)** $\|\vec{o}\| = 4$; orientation : 270°.

i) $\|\vec{p}\| = 6\sqrt{2}$; orientation : 135°. **j)** $\|\vec{e}\| = 20\sqrt{26}$; orientation : $\approx$ 348,69°.

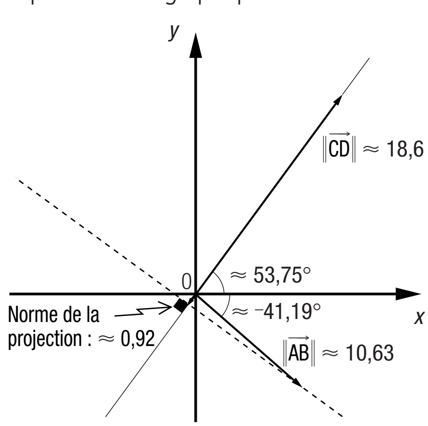
k) $\|\vec{c}\| = 117$; orientation : 180°. **l)** $\|\vec{h}\| = \sqrt{49{,}64}$; orientation : $\approx$ 263,48°.

6. a) 1) $\frac{b}{a}$ **2)** $\frac{-a}{b}$

b) La pente d'une droite correspond à l'opposé de l'inverse de la pente de l'autre droite. Le produit des deux pentes est donc -1.

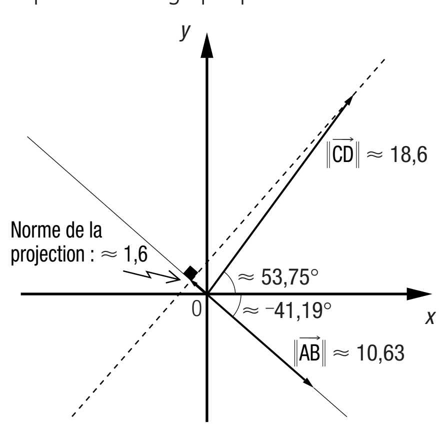
c) Les deux vecteurs sont orthogonaux, car ils sont supportés par des droites dont le produit des pentes est -1, ce qui indique que ces droites sont perpendiculaires.

7. a) Représentation graphique de la situation



Norme : $\approx 10{,}63 \times \cos 85{,}06° \approx 0{,}92$;
orientation : $180° + \arctan \frac{15}{11} \approx 233{,}75°$.

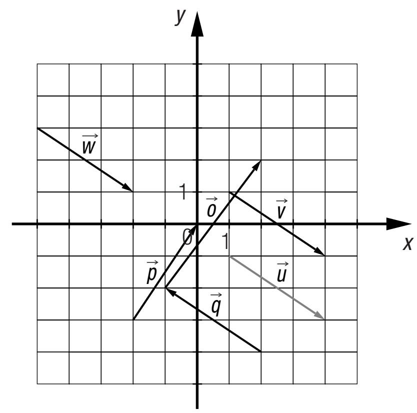
b) Représentation graphique de la situation



Norme : $\approx 18{,}6 \times \cos 85{,}06° \approx 1{,}6$;
orientation : $180° - \arctan \frac{7}{8} \approx 138{,}81°$.

Mise au point 5.1 (*suite*)

8. *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*



9. a) Soit $(x, 3x)$, où $x \in \mathbb{N}$, les composantes de ce vecteur. Orientation : $\arctan \frac{3x}{x} = \arctan 3$, soit $\approx 71{,}57°$.

b) Norme : $\sqrt{x^2 + (3x)^2} = \sqrt{x^2 + 9x^2} = \sqrt{10x^2} = \sqrt{10}\,x$. Comme x est un nombre naturel, $\sqrt{10}\,x$ est un multiple de $\sqrt{10}$.

c) La composante horizontale vaut le triple de l'opposé de la composante verticale.

10. a) $360° - \arctan \frac{3}{4} \approx 323{,}13°$

b) Orientation : $\arctan \frac{3{,}6}{3{,}5} \approx 45{,}81°$.

$x \approx 2{,}5 \cos 45{,}81° \approx 1{,}74$

$y \approx 2{,}5 \sin 45{,}81° \approx 1{,}79$

$\vec{f} \approx (1{,}74,\ 1{,}79)$

c) Les coordonnées de l'objet sont $(4{,}8,\ ^-1{,}4)$.

Mise au point 5.1 (*suite*)

11. a) $\approx 7{,}82$ **b)** $\approx 35{,}81$ **c)** $\approx 0{,}71$ **d)** $\approx 0{,}16$

12. a) $\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{10}{\cos 46°}$, soit $\approx 14{,}40$.

$x \approx {}^-14{,}40 \cos 59° \approx {}^-7{,}41$

$y \approx 14{,}40 \sin 59° \approx 12{,}34$

$\overrightarrow{AB} \approx ({}^-7{,}41,\ 12{,}34)$

b) $\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{10}{\cos 47°}$, soit $\approx 14{,}66$.

$x \approx 14{,}66 \cos 64° \approx 6{,}43$

$y \approx 14{,}66 \sin 64° \approx 13{,}18$

$\overrightarrow{AB} \approx (6{,}43,\ 13{,}18)$

13. a) $\approx (1{,}61,\ {}^-0{,}58)$ **b)** $\approx (5{,}44,\ 4{,}1)$ **c)** $\approx ({}^-1{,}54,\ 2{,}3)$

Mise au point 5.1 (*suite*)

14. a) B($\approx 4{,}12$, $\approx 14{,}04°$)
D($\approx 4{,}12$, $\approx 104{,}04°$)
E($\approx 3{,}61$, $\approx 236{,}31°$)
F($\approx 3{,}61$, $\approx 326{,}31°$)

b) H($\approx {}^-3{,}46$, ${}^-2$)

15. a) Pour John, $\theta = \arcsin \frac{40}{200}$, soit $\approx 11{,}54°$. $\vec{f}_h \approx 2000 \times \cos 11{,}54°$, soit $\approx 1959{,}57$ N.

Pour Arthur, $\theta = \arcsin \frac{50}{200}$, soit $\approx 14{,}48°$. $\vec{f}_h \approx 2200 \times \cos 14{,}48°$, soit $\approx 2130{,}12$ N.

Arthur exerce la plus grande force.

b) Il faut que $2300 \times \cos \theta \approx 2130{,}12$ N. On en déduit que $\theta \approx \arccos \frac{2130{,}12}{2300}$, soit $\approx 22{,}15°$.

Si x représente la hauteur du point B, on a $\sin 22{,}15° \approx \frac{x - 30}{200} \Rightarrow x - 30 \approx 75{,}44$ cm.

La hauteur du point B devrait donc être d'environ 105,44 cm.

c) Plus l'angle θ est proche de 0, plus la composante horizontale de la force exercée est grande. Puisque c'est cette composante qui engendre un déplacement, les concurrents se placent de manière à ce que θ soit proche de 0, c'est-à-dire de manière à ce que la corde se rapproche de l'horizontale.

Mise au point 5.1 (*suite*) **Page 26**

16. a) 1) $\theta = \arccos\left(\frac{\|\overrightarrow{AB'}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right) = \arccos\left(\frac{\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$

2) $\theta = \arccos\left(\frac{\|\overrightarrow{AB'}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right) = \arccos\left(\frac{\frac{1}{4}\|\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right) = \arccos\left(\frac{1}{4}\right)$, soit $\approx 75,52°$.

3) $\theta = \arccos\left(\frac{\|\overrightarrow{AB'}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right) = \arccos\left(\frac{\|\overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right) = \arccos 1 = 0°$

4) $\theta = \arccos\left(\frac{\|\overrightarrow{AB'}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right) = \arccos\left(\frac{\|\overrightarrow{0}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right) = \arccos 0 = 90°$ ou $270°$.

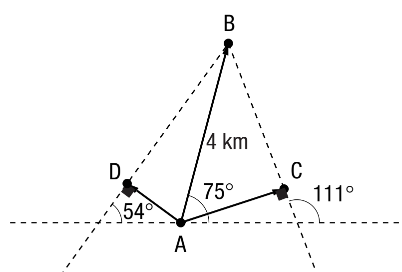
b) On a $\theta = \arccos\frac{\|\overrightarrow{AB'}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$. Si $\overrightarrow{AB'}$ est un vecteur unitaire, alors $\|\overrightarrow{AB'}\| = 1$ et $\theta = \arccos\frac{1}{\|\overrightarrow{AB}\|}$.

17. a) $m\angle BAC = 75° - (90° - (180° - 111°)) = 54°$

$\|\overrightarrow{AC}\| = 4\cos 54°$, soit $\approx 2,35$ km.

Le déplacement perçu par Juliette a une norme d'environ 2,35 km et une orientation de 21°.

b) 1)



2) $m\angle BAD = 90° - (180° - 75°) - (90° - 54°) = 69°$

$\|\overrightarrow{AD}\| = 4\cos 69°$, soit $\approx 1,43$ km.

La longueur du déplacement du bateau perçu par Raoul est environ de 1,43 km.

SECTION 5.2 Les opérations sur les vecteurs

Problème **Page 27**

Trois conjectures possibles :

1re conjecture : Le résultat d'une somme de vecteurs est également un vecteur.

2e conjecture : Lorsqu'on additionne deux vecteurs de même origine, il est possible de former un parallélogramme à l'aide des deux vecteurs à additionner. Le résultat est alors un vecteur qui a la même origine que les deux autres et qui est superposé à une diagonale du parallélogramme.

3e conjecture : Lorsqu'on additionne plusieurs vecteurs, il est possible de mettre bout à bout les vecteurs à additionner de manière à ce que l'origine d'un vecteur corresponde à l'extrémité d'un autre. Le vecteur qui correspond à la somme de ces vecteurs est celui qui relie l'origine du premier vecteur à l'extrémité du dernier vecteur.

Activité 1 **Page 28**

a. 1) Puisque les déplacements sont successifs, ils ne peuvent pas commencer au même point.

2) Le deuxième déplacement commence à l'endroit où le premier déplacement s'est terminé, ce qui correspond bien à la définition de deux déplacements successifs.

b. **1)** 62°

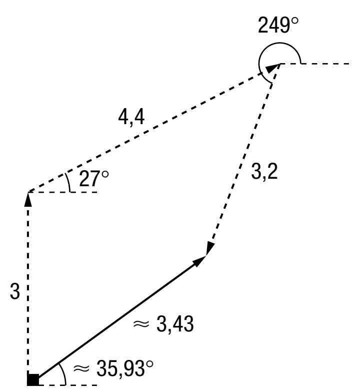
2) En utilisant la loi des cosinus, on trouve $\|\overrightarrow{DF}\| \approx 5{,}74$ dam.

3) En utilisant la loi des sinus, on trouve la mesure de l'angle FDE, soit environ 37,99°. On en déduit que l'orientation du vecteur DF est environ de 32,01°.

c. Cela revient à démontrer que $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{GH}$.

AFFIRMATION	JUSTIFICATION
$m \angle GIH = 180° - 70° - (360° - 312°) = 62°$ $m \angle GHI = m \angle DEF$	
$\Delta\, GHI \cong \Delta\, DEF$	Par CAC.
$\|\overrightarrow{DF}\| = \|\overrightarrow{GH}\|$	Les côtés homologues de deux triangles isométriques sont isométriques.
$m \angle IGH = \arcsin \frac{6{,}4 \sin 62°}{\|\overrightarrow{GH}\|}$, soit $\approx 80{,}01°$.	Par la loi des sinus.
Orientation de $\overrightarrow{GH} \approx 80{,}01° - (360° - 312°)$, soit $\approx 32{,}01°$.	
$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{DF}$	Deux vecteurs qui ont la même norme et la même orientation sont équipollents.

d.



Activité 2

Page 29

a. $\approx (849{,}07,\ 375{,}02)$

b. **1)** $0 + {}^-249{,}4 + 1098{,}5 = 849{,}1$ N

2) La somme des composantes horizontales des vecteurs *p*, *n* et *f* est approximativement égale à la composante horizontale du vecteur *r*.

c. **1)** ${}^-1000 + 933{,}4 + 441{,}6 = 375$ N

2) La somme des composantes verticales des vecteurs *p*, *n* et *f* est approximativement égale à la composante verticale du vecteur *r*.

d. Les composantes d'un vecteur résultant de l'addition de plusieurs vecteurs correspondent à la somme des composantes de chacun des vecteurs additionnés.

Activité 3

Page 30

a. **1)** **i)** $\vec{f} + \vec{f} + \vec{f}$ **ii)** $\vec{f} + \vec{f} + \vec{f} + \vec{f} + \vec{f}$

2) **i)** $3\vec{f}$ **ii)** $5\vec{f}$

3) **i)** La norme est 9000 N et l'orientation est de 143°.

ii) La norme est 15 000 N et l'orientation est de 143°.

b. **1)** L'orientation du vecteur obtenu est identique à l'orientation du vecteur de départ.
2) La norme du vecteur obtenu correspond à la norme du vecteur de départ multipliée par le scalaire.

c. **1)** ≈ (−2395,91, 1805,45) **2)** ≈ (−7187,72, 5416,34) **3)** ≈ (−11 979,53, 9027,23)

d. Cette conjecture est vraie, car :

- (3 × −2395,91, 3 × 1805,45) = (−7187,73, 5416,35), ce qui correspond pratiquement au résultat obtenu en **c 2)** ;
- (5 × −2395,91, 5 × 1805,45) = (−11 979,55, 9027,25), ce qui correspond pratiquement au résultat obtenu en **c 3)**.

Technomath

Page 31

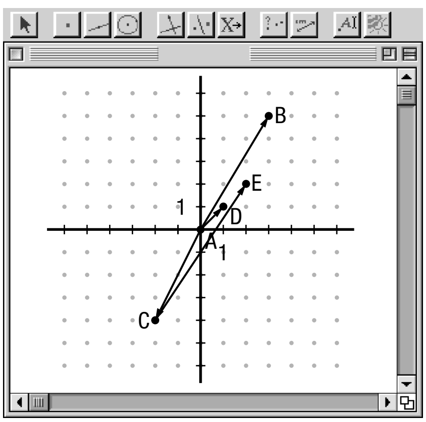
a. **1)** (4, 2) **2)** (−3, 3) **3)** (1, 5)

b. **1)** (5, −2) **2)** (−3, 3) **3)** (2, 1)

c. Les composantes d'un vecteur résultant de la somme de deux autres vecteurs correspondent à la somme des composantes de ces deux vecteurs.

d. $\overrightarrow{AB}$ = (6, −1), $\overrightarrow{AC}$ = (1, 7) et $\overrightarrow{AD}$ = (7, 6). Or, puisque (6 + 1, −1 + 7) = (7, 6), la conjecture est vérifiée.

e.

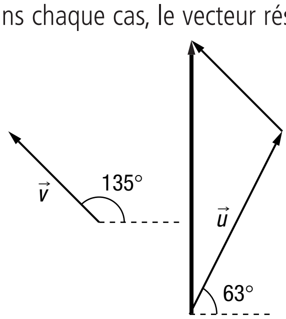


Mise au point 5.2

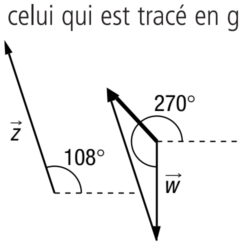
Page 35

1. Dans chaque cas, le vecteur résultant est celui qui est tracé en gras.

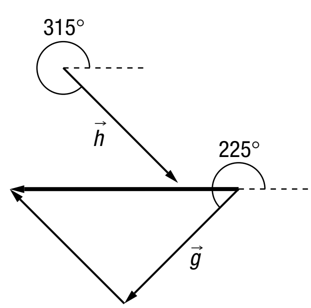
a)



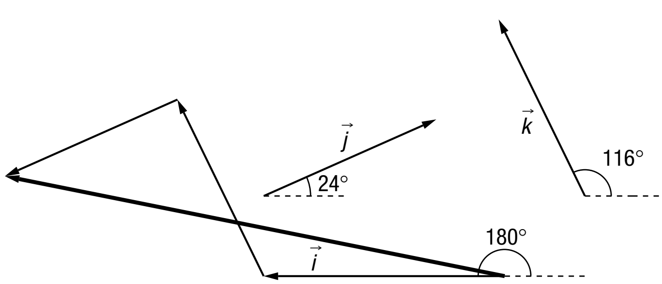
b)



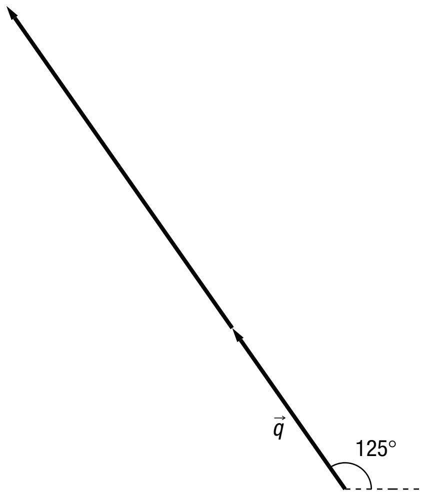
c)



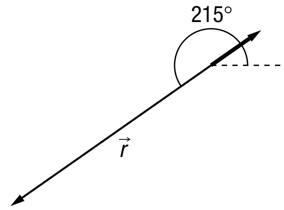
d)



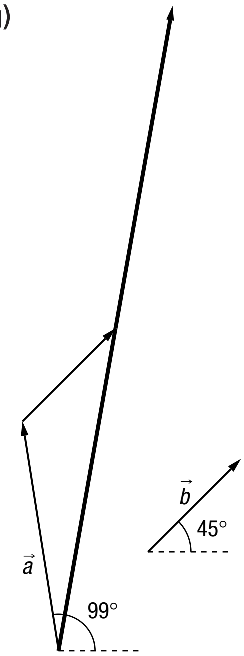
e)



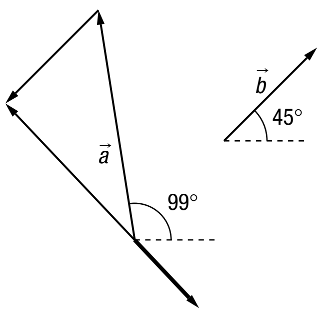
f)



g)



h)



Mise au point 5.2 (*suite*) **Page 36**

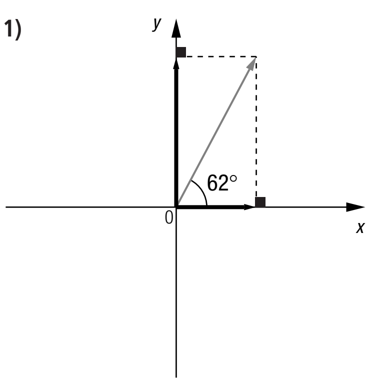
2. a) Norme : ≈ 3,12 ; orientation : ≈ 108,09°. **b)** Norme : ≈ 5,07 ; orientation : 78°.
c) Norme : ≈ 22,82 ; orientation : ≈ 294,53°. **d)** Norme : ≈ 31,82 ; orientation : ≈ 72,32°.

3. a) $\overrightarrow{AF}$ **b)** $\overrightarrow{AG}$ **c)** $\overrightarrow{AH}$ **d)** $\overrightarrow{CB}$
e) $\overrightarrow{DF}$ **f)** $\overrightarrow{HG}$ **g)** $\overrightarrow{HF}$

4. a) $\overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{BD}$ **c)** $\overrightarrow{AB}$ **d)** $\overrightarrow{AA}$ ou $\vec{0}$. **e)** $\overrightarrow{AE}$ **f)** $\overrightarrow{AB}$

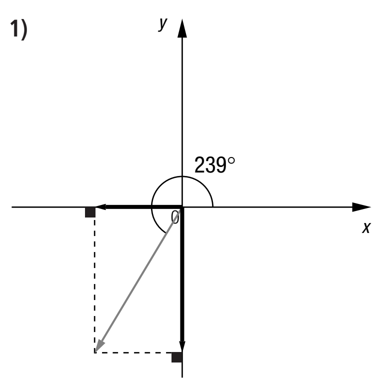
Mise au point 5.2 (*suite*) **Page 37**

5. a) 1)



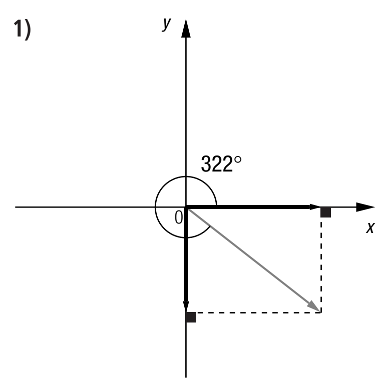
2) ≈ (1,88, 3,53)

b) 1)



2) ≈ (−38,63, −64,29)

c) 1)



2) ≈ (0,14, −0,11)

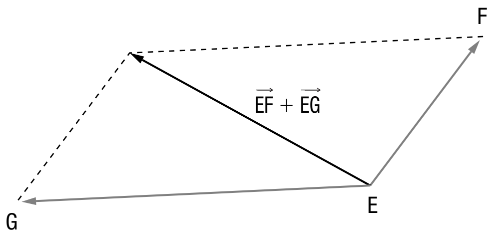
6. a) $\vec{v} = \frac{41}{12}\vec{u}$ **b)** $\vec{v} = \frac{5}{21}\vec{u}$ **c)** $\vec{v} = -2{,}5\vec{u}$

7. a) 1 Les segments AC et BD sont des côtés opposés d’un parallélogramme et sont, par conséquent, parallèles et isométriques. Les vecteurs AC et BD ont donc la même norme, la même orientation et sont équipollents.
2 C’est une application directe de la relation de Chasles.

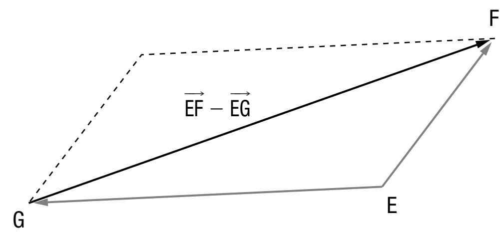
③ Dans l'égalité $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$, on a remplacé $\overrightarrow{BD}$ par $\overrightarrow{AC}$ qui lui est équipollent. Or, remplacer un terme par un terme équivalent conserve l'égalité.

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$
$= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$
$= \overrightarrow{CB}$

c) **1)**



2)



Mise au point 5.2 (*suite*) **Page 38**

8. a) (4, 6) **b)** (2, 10) **c)** (2, –4) **d)** (1, 0) **e)** (20, 8)
f) (3, –12) **g)** (–12, –12) **h)** (36, 72) **i)** (–9, 0)

9. a) ≈ 4702,28 m
b) ≈ 275,07 m

10. a) 1) La vitesse limite est atteinte lorsque $\vec{p} = -\vec{f}$. Puisque le signe « – » est associé au sens du vecteur, et non à sa norme, on a :

$\|\vec{p}\| = \|\vec{f}\|$
$m\|\vec{g}\| = 13{,}7\|\vec{v}\|$
$70 \times 9{,}8 = 13{,}7\|\vec{v}\|$
$\|\vec{v}\| \approx 50{,}07$ m/s

La vitesse limite est donc environ de 50,07 m/s, soit environ 180 km/h.

2) $m\|\vec{g}\| = 5{,}3\|\vec{v}\|$
$50 \times 9{,}8 = 5{,}3\|\vec{v}\|$
$\|\vec{v}\| \approx 92{,}45$ m/s

La vitesse limite est donc environ de 92,45 m/s, soit environ 333 km/h.

b) 1) $m\|\vec{g}\| = 13{,}7\|\vec{v}\|$
$m \times 9{,}8 = 13{,}7 \times 65$
$m \approx 90{,}87$ kg
La masse d'un parachutiste est environ de 90,87 kg.

2) $m\|\vec{g}\| = 5{,}3\|\vec{v}\|$
$m \times 9{,}8 = 5{,}3 \times 95$
$m \approx 51{,}38$ kg
La masse d'une parachutiste est environ de 51,38 kg.

Mise au point 5.2 (*suite*) **Page 39**

11. a) 1) 180°
2) $\|\overrightarrow{OA}\| = 1{,}8$ m
3) Le barycentre est placé à 1,8 m du point A ou à 1,2 m du point B.

b) $\|\overrightarrow{OA}\| = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\|\overrightarrow{AB}\|$

$10 \text{ cm} = \frac{1}{1000 + 1}\|\overrightarrow{AB}\|$

$\|\overrightarrow{AB}\| = 10\,010$ cm ou 10,01 m.
Ce levier doit avoir une longueur de 10,01 m.

12. a) $\vec{v} = (6, 4)$, $\vec{t} = (3, -12)$ et $\vec{q} = (-0{,}4, -1)$.

b) **1)** La pente de la droite qui supporte $\vec{u}$ est de $\frac{2}{3}$.
2) La pente de la droite qui supporte $\vec{v}$ est de $\frac{4}{6}$, soit $\frac{2}{3}$.
3) La pente de la droite qui supporte $\vec{s}$ est de -4.
4) La pente de la droite qui supporte $\vec{t}$ est de $-\frac{12}{3}$, soit -4.
5) La pente de la droite qui supporte $\vec{p}$ est de $\frac{5}{2}$.
6) La pente de la droite qui supporte $\vec{q}$ est de $-\frac{-1}{-0{,}4}$, soit $\frac{5}{2}$.

c) **1)** Deux vecteurs dont l'un correspond au produit de l'autre par un scalaire sont supportés par des droites de même pente, donc parallèles. Les deux vecteurs ont donc nécessairement la même direction.
2) Les composantes de $\vec{w}$ sont (ka, kb). La pente de la droite qui supporte $\vec{v}$ est de $\frac{b}{a}$. La pente de la droite qui supporte $\vec{w}$ est de $\frac{kb}{ka}$, soit $\frac{b}{a}$. Les pentes sont les mêmes, ce qui confirme la conjecture.

13. a) $\vec{v_i} = (-5, 0)$, $\vec{v_f} = (0, -5)$ et $\vec{v_f} - \vec{v_i} = (0 - -5, -5 - 0) = (5, -5)$.

$\vec{f} = m\frac{\vec{v_f} - \vec{v_i}}{t} = (0{,}1 \times 5, 0{,}1 \times -5) = (0{,}5, -0{,}5)$

$\|\vec{f}\| = \sqrt{0{,}5^2 + (-0{,}5)^2}$, soit $\approx 0{,}71$ N.

Orientation de $\vec{f}$: $360° - \arctan\frac{0{,}5}{0{,}5} = 315°$.

b) $\vec{v_i} = (15 \times \cos 134°, 15 \times \sin 134°)$, soit $\approx (-10{,}42, 10{,}79)$.

$\vec{v_f} = (20 \times \cos 237°, 20 \times \sin 237°)$, soit $\approx (-10{,}89, -16{,}77)$.

$\vec{v_f} - \vec{v_i} \approx (-10{,}89 - -10{,}42, -16{,}77 - 10{,}79) \approx (-0{,}47, -27{,}56)$

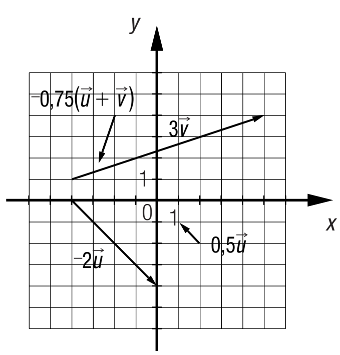
Puisque $\vec{f} = m\frac{\vec{v_f} - \vec{v_i}}{t}$, on a $\approx (20 \times -0{,}47 \div 3600, 20 \times -27{,}56 \div 3600) \approx (-0{,}003, -0{,}15)$.

$\|\vec{f}\| \approx \sqrt{(-0{,}003)^2 + (-0{,}15)^2} \approx 0{,}15$ N

Orientation de $\vec{f}$: $\approx 180° + \arctan\frac{0{,}15}{0{,}003} \approx 268{,}85°$.

Mise au point 5.2 (*suite*)

14. *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*



15. La quantité de mouvement transmise à l'engin par chaque photon est donnée par $\|\vec{p}\|\sin\theta$. La quantité de mouvement de l'engin doit être égale à la quantité de mouvement transmise par les photons. On a donc $m\|\vec{v}\| = n\|\vec{p}\|\sin\theta$, où n représente le nombre de photons qui percutent la voile.

a) **1)** $m\|\vec{v}\| = n\|\vec{p}\|\sin\theta$

$(50)(1) = n(10^{-27}\sin 90°)$

$n = 5 \times 10^{28}$

5×10^{28} photons doivent percuter la voile.

2) $m\|\vec{v}\| = n\|\vec{p}\|\sin\theta$

$(50)(1) = n(10^{-27}\sin 45°)$

$n \approx 7{,}07 \times 10^{28}$

Environ $7{,}07 \times 10^{28}$ photons doivent percuter la voile.

3) $m\|\vec{v}\| = n\|\vec{p}\|\sin\theta$

$(50)(1) = n(10^{-27}\sin 15°)$

$n \approx 1{,}93 \times 10^{29}$

Environ $1{,}93 \times 10^{29}$ photons doivent percuter la voile.

b) **1)** $n = 3600 \times 10^{30} = 3{,}6 \times 10^{33}$ photons.

$$m\|\vec{v}\| = n\|\vec{p}\|\sin\theta$$
$$50\|\vec{v}\| = (3{,}6 \times 10^{33})(10^{-27}\sin 50°)$$
$$\|\vec{v}\| \approx 5{,}51 \times 10^{4}\text{ m/s}$$

La vitesse de l'engin spatial est environ de $5{,}51 \times 10^{4}$ m/s.

2) $n = 7 \times 24 \times 3600 \times 10^{30}$, soit $\approx 6{,}05 \times 10^{35}$ photons.

$$m\|\vec{v}\| = n\|\vec{p}\|\sin\theta$$
$$50\|\vec{v}\| \approx (6{,}05 \times 10^{35})(10^{-27}\sin 50°)$$
$$\|\vec{v}\| \approx 9{,}26 \times 10^{6}\text{ m/s}$$

La vitesse de l'engin spatial est environ de $9{,}26 \times 10^{6}$ m/s.

3) $n = 365 \times 24 \times 3600 \times 10^{30}$, soit $\approx 3{,}15 \times 10^{37}$ photons.

$$m\|\vec{v}\| = n\|\vec{p}\|\sin\theta$$
$$50\|\vec{v}\| \approx (3{,}15 \times 10^{37})(10^{-27}\sin 50°)$$
$$\|\vec{v}\| \approx 4{,}83 \times 10^{8}\text{ m/s}$$

La vitesse de l'engin spatial est environ de $4{,}83 \times 10^{8}$ m/s.

SECTION 5.3 Le produit scalaire

Problème

Page 41

- La norme de la composante horizontale de $\vec{f}$ est $90\,000 \times \cos 16°$, soit environ 86 513,55 N.
- Puisque l'énergie déployée lors du freinage correspond au produit de la composante horizontale de $\vec{f}$ par la distance d nécessaire à l'immobilisation de l'avion, on a :

  $20\,000\,000 \approx 86\,513{,}55 \times d$

  $d \approx 231{,}18$ m
- Puisque cette distance est celle franchie par les roues arrière, il faut :
  – y ajouter 10 m, car le train arrière touche le porte-avions à 10 m du début de la piste ;
  – y ajouter la distance qui sépare le train avant du train arrière, sans quoi l'avion basculerait au bord du porte-avions.
- La distance de freinage est de 231,18 m + 10 m + 6 m, soit environ 247,18 m.
- Il faut y ajouter 10 % de 247,18 m, soit environ 24,72 m.

La longueur minimale du porte-avions devrait être d'environ 271,90 m.

Activité 1

Page 42

a. **1)** $\approx$ 3328,7 N **2)** $\approx$ 4212,79 N

b. **1)** $\approx$ 166 434,89 J **2)** $\approx$ 189 575,76 J

c. $W = \|\vec{f}\| \times \|\vec{d}\| \times \cos\theta$

d. **1)** $\approx$ 28,74 m **2)** $\approx$ 29,75 m **3)** $\approx$ 40,64 m **4)** $\approx$ 57,47 m

Mise au point 5.3

Page 44

1. **a)** $\approx 18{,}53$ **b)** $\approx 2{,}91$ **c)** $\approx 2{,}96$ **d)** $\approx -1{,}98$ **e)** $\approx 9{,}27$
f) $\approx -6{,}02$ **g)** 0 **h)** 15 **i)** $-5{,}4$

2. **a)** 3 **b)** 41 **c)** 1,7 **d)** 313 **e)** $-4{,}5$ **f)** 100

3. a) 1) 43 **2)** $\approx 5{,}39$ et $\approx 8{,}06$. **3)** $\approx 7{,}94°$

b) 1) 5 **2)** $\approx 1{,}41$ et $\approx 3{,}61$. **3)** $\approx 11{,}31°$

c) 1) -13 **2)** $\approx 5{,}83$ et $\approx 6{,}08$. **3)** $\approx 111{,}5°$

d) 1) -28 **2)** $\approx 8{,}94$ et $\approx 9{,}06$. **3)** $\approx 110{,}22°$

e) 1) -70 **2)** $\approx 7{,}62$ et 10. **3)** $\approx 156{,}8°$

f) 1) ab **2)** $|b|$ et $\sqrt{2}|a|$. **3)** 45° ou 135°.

Mise au point 5.3 (*suite*)

4. a) 1) $\approx 5{,}54$ **2)** $\approx -7{,}88$ **3)** $\approx -7{,}46$ **4)** 0 **5)** $\approx -3{,}94$ **6)** 0

b) Le produit scalaire de deux vecteurs qui forment un angle obtus est négatif.

c) E et H.

d) 1) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* (6, −4) **2)** *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* (2, 5)

3) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* (8, −30)

5. a) 1) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $\vec{u} = (2, 4)$ **2)** *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $\vec{v} = (2, 7)$

b) 1) *Plusieurs réponses possibles, selon les vecteurs nommés en **a)**. Exemple :*
$\|\vec{u}\| \approx 4{,}47$ et $\|\vec{v}\| \approx 7{,}28$.

2) *Plusieurs réponses possibles, selon les vecteurs nommés en **a)**. Exemple :*
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 2 + 4 \times 7 = 32$

c) Puisque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 32$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$, on a :

$\theta = \arccos\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$, soit $\approx \arccos\dfrac{32}{(4{,}47)(7{,}28)} \approx 10{,}47°$.

La mesure de l'angle aigu formé par les droites d_1 et d_2 est environ de 10,47°.

Mise au point 5.3 (*suite*)

6. a)
$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= (a, b) \cdot (c, d)\\ &= ac + bd\\ &= ca + db\\ &= (c, d) \cdot (a, b)\\ &= \vec{v} \cdot \vec{u}\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}k_1\vec{u} \cdot k_2\vec{v} &= k_1(a, b) \cdot k_2(c, d)\\ &= (k_1a, k_1b) \cdot (k_2c, k_2d)\\ &= k_1ak_2c + k_1bk_2d\\ &= k_1k_2ac + k_1k_2bd\\ &= k_1k_2(ac + bd)\\ &= k_1k_2((a, b) \cdot (c, d))\\ &= k_1k_2(\vec{u} \cdot \vec{v})\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= (a, b) \cdot ((c, d) + (e, f))\\ &= (a, b) \cdot (c + e, d + f)\\ &= a(c + e) + b(d + f)\\ &= ac + ae + bd + bf\\ &= ac + bd + ae + bf\\ &= (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f)\\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{u} &= (a, b) \cdot (a, b)\\ &= a^2 + b^2\\ &= (\sqrt{a^2 + b^2})^2\\ &= \|\vec{u}\|^2\end{aligned}$$

7. a) 1) $45 \times 30 \times \cos 25° \approx 1223{,}52$ J **2)** $45 \times 40 \times \cos(25° + 56°) \approx 281{,}58$ J

3) $45 \times 35 \times \cos(25° + 18°) \approx 1151{,}88$ J **4)** $1223{,}52 + 281{,}58 + 1151{,}88 \approx 2656{,}98$ J

b) Si les trois déplacements correspondent respectivement aux vecteurs $\vec{d_1}$, $\vec{d_2}$ et $\vec{d_3}$, la somme des travaux W_{total} peut s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned}W_{total} &= W_1 + W_2 + W_3\\ &= \vec{f} \cdot \vec{d_1} + \vec{f} \cdot \vec{d_2} + \vec{f} \cdot \vec{d_3}\\ &= \vec{f} \cdot (\vec{d_1} + \vec{d_2} + \vec{d_3})\\ &= \vec{f} \cdot \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

8. a) *Deux réponses possibles :* Puisque l'orientation de $\vec{u}$ est environ de 68,2°, l'orientation du vecteur recherché peut être d'environ 98,2° ou 38,2°.
Pour le vecteur dont l'orientation est environ de 38,2°, les composantes sont environ $(2 \times \cos 38{,}2°, 2 \times \sin 38{,}2°)$, soit environ (1,57, 1,24).
Pour le vecteur dont l'orientation est environ de 98,2°, les composantes sont environ $(2 \times \cos 98{,}2°, 2 \times \sin 98{,}2°)$, soit environ (−0,29, 1,98).

b) La norme de $\vec{u}$ est environ 5,39. On a donc :
$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{w} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{w}\| \times \cos\theta \\ 4 &\approx 5{,}39 \times 3 \times \cos\theta \\ \cos\theta &\approx 0{,}247 \\ \theta &\approx 75{,}68° \end{aligned}$$

c) La norme de $\vec{u}$ est environ 5,39. On a donc :
$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{s} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{s}\| \times \cos\theta \\ 10 &\approx 5{,}39 \times \|\vec{s}\| \times \cos 45° \\ \|\vec{s}\| &\approx 2{,}62 \end{aligned}$$

d) *Deux réponses possibles :* Puisque l'orientation de $\vec{u}$ est environ de 68,2°, l'orientation du vecteur recherché peut être d'environ 158,2° ou 338,2°.
Pour le vecteur dont l'orientation est environ de 158,2°, les composantes sont $\approx (1 \times \cos 158{,}2°, 1 \times \sin 158{,}2°)$, soit $\approx$ (−0,93, 0,37).
Pour le vecteur dont l'orientation est environ de 338,2°, les composantes sont $\approx (1 \times \cos 338{,}2°, 1 \times \sin 338{,}2°)$, soit $\approx$ (0,93, −0,37).

Mise au point 5.3 (*suite*)

9. a) 1) $W = 200 \times 35 + 40 \times 10 = 7400$ J **2)** La force est motrice.
b) 1) $W = -30 \times 20 + 20 \times 10 = -400$ J **2)** La force est résistante.
c) 1) $W = 150 \times 13 \times \cos 48°$, soit $\approx 1304{,}8$ J. **2)** La force est motrice.
d) 1) $W = 3500 \times 145 \times \cos 126°$, soit $\approx -298\,301$ J. **2)** La force est résistante.
e) 1) $\vec{d} \approx (102{,}53, 102{,}53)$ et $W \approx 125 \times 102{,}53 + 10 \times 102{,}53$, soit $\approx 13\,841{,}62$ J. **2)** La force est motrice.
f) 1) $\vec{f} \approx (3288{,}92, -1197{,}07)$ et $W \approx 3288{,}92 \times 3 + -1197{,}07 \times 200$, soit $\approx -229\,547{,}33$ J.
2) La force est résistante.

10. Puisque $\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$, on a :
$$\begin{aligned} ac + bd &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta \\ \cos\theta &= \frac{ac + bd}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \\ \cos\theta &= \frac{ac + bd}{(\sqrt{a^2 + b^2})(\sqrt{c^2 + d^2})} \\ \cos\theta &= \frac{ac + bd}{\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}} \\ \theta &= \arccos \frac{ac + bd}{\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}} \end{aligned}$$

11. a) $\vec{u} \cdot \vec{t} = 5 \times 7 \times \cos 123° \approx -19{,}06$

b)
$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{s} + \vec{t}) &= \vec{u} \cdot \vec{s} + \vec{u} \cdot \vec{t} \\ &= 5 \times 2 \times \cos 105 + 5 \times 7 \times \cos 123° \\ &\approx -21{,}65 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{s}) \cdot (\vec{v} + \vec{t}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{t} + \vec{s} \cdot \vec{v} + \vec{s} \cdot \vec{t} \\ &= 5 \times 4 \times \cos 45° + 5 \times 7 \times \cos 123° + 2 \times 4 \times \cos 60° + 2 \times 7 \times \cos 18° \\ &\approx 12{,}39 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{t}) \cdot (\vec{s} + \vec{v}) &= \vec{u} \cdot \vec{s} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{t} \cdot \vec{s} + \vec{t} \cdot \vec{v} \\ &= 5 \times 2 \times \cos 105° + 5 \times 4 \times \cos 45° + 2 \times 7 \times \cos 18° + 7 \times 4 \times \cos 78° \\ &\approx 30{,}69 \end{aligned}$$

Mise au point 5.3 (*suite*) **Page 48**

12. Pour chaque schéma, on calcule la valeur de l'expression donnée.

Schéma ① : $(50 \times 0{,}05)^2 - (50 \times 0{,}05 \times \cos 67°)^2$, soit $\approx 5{,}30$.

Schéma ② : $(50 \times 0{,}05)^2 - (50 \times 0{,}05 \times \cos 180°)^2 = 0$.

Schéma ③ : $(50 \times 0{,}05)^2 - (50 \times 0{,}05 \times \cos 90°)^2 = 6{,}25$.

La force a la plus grande capacité d'engendrer une rotation dans le cas du schéma ③.

Dans ce cas, le nombre qui correspond à $(\vec{f} \cdot \vec{d})^2$ est le plus petit, soit 0, car $\vec{f}$ et $\vec{d}$ sont perpendiculaires.

Le nombre qui correspond à $(\|\vec{f}\| \times \|\vec{d}\|)^2 - (\vec{f} \cdot \vec{d})^2$ est donc le plus grand possible.

13. a) On a $\vec{f} \approx (134{,}82, 65{,}76)$ et $\vec{p} = (0, {}^-800)$. On en déduit que :

- $\vec{f} + \vec{p} \approx (134{,}82 + 65{,}76, {}^-800) \approx (134{,}82, {}^-734{,}24)$;
- $\|\vec{f} + \vec{p}\| \approx \sqrt{(134{,}82)^2 + ({}^-734{,}24)^2} \approx 746{,}52$ N ;
- l'orientation de $\vec{f} + \vec{p}$ est environ de $360° - \arctan \frac{734{,}24}{134{,}82}$, soit environ 280,4°.

b) 1) $\vec{p} \cdot \vec{d} = 800 \times 50 \times \cos 64°$, soit $\approx 17\,534{,}85$ J.

2) $\vec{f} \cdot \vec{d} = 150 \times 50 \times \cos 180° = {}^-7500$ J

3) L'angle compris entre $(\vec{f} + \vec{p})$ et $\vec{d}$ mesure environ $280{,}4° - 270° + 64°$, soit environ 74,4°.

On a donc $(\vec{f} + \vec{p}) \cdot \vec{d} \approx 746{,}52 \times 50 \times \cos 74{,}4° \approx 10\,037{,}7$ J.

c) $\vec{p} \cdot \vec{d} + \vec{f} \cdot \vec{d} \approx 17\,534{,}85 \text{ J} - 7500 \text{ J} \approx 10\,034{,}85$ J, ce qui correspond pratiquement au résultat obtenu en **b 3).**

Mise au point 5.3 (*suite*) **Page 49**

14. a) 1) $\frac{b}{a}$ **2)** $\frac{d}{c}$

b) 1) $ac + bd$

2) $ac + bd = 0$

3) $bd = {}^-ac$

$\frac{bd}{a} = {}^-c$

$\frac{b}{a} = {}^-\frac{c}{d}$

$\frac{b}{a} = {}^-\frac{1}{\frac{d}{c}}$

Donc, la pente de la droite qui supporte $\vec{u}$ est opposée et inverse à la pente de la droite qui supporte $\vec{v}$. Puisque les deux vecteurs sont orthogonaux, on en déduit que les pentes de deux droites perpendiculaires sont opposées et inverses.

15. a) 1)

AFFIRMATION	JUSTIFICATION
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$	Par la relation de Chasles.
$\overrightarrow{AB} = {}^-\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$	Car l'opposé du vecteur $\overrightarrow{CA}$ est $\overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$	Car l'addition de vecteurs est commutative.

2) On peut effectuer la même opération sur le membre de gauche et sur le membre de droite d'une égalité tout en conservant cette égalité.

b) 1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} - 2\ \boldsymbol{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}} + \boldsymbol{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CA}}$

2) $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \boldsymbol{\|\overrightarrow{CB}\|^2 + \|\overrightarrow{CA}\|^2 - 2 \times \|\overrightarrow{CB}\| \times \|\overrightarrow{CA}\| \cos\theta}$

Chronique du passé

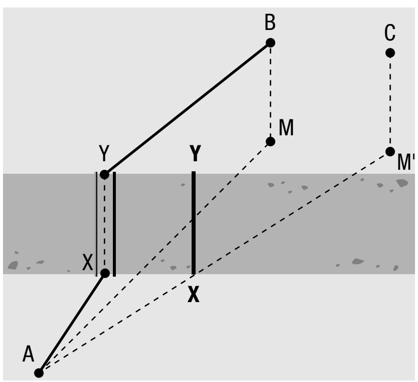
Page 51

1. (A, X) + (X, Y) + (Y, B) = (A, X) + (X, **M**) + (M, **B**)
(A, X) + (X, Y) + (Y, B) = (A, X) + (X, M) + (X, Y)
(A, X) + (Y, B) = (A, X) + (**X**, **M**) = (A, M)

On en déduit que (Y, B) = (**X**, **M**).
Puisque la ligne droite constitue le trajet le plus court entre les points A et M, le trajet (A, X) + (X, M) est minimal si les points A, X et M sont alignés. Or, ce trajet est de la même longueur que (A, X) + (**Y**, **B**), car (X, M) = (Y, B).

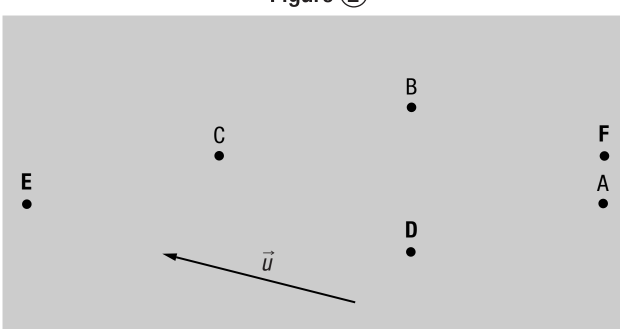
2.

Figure ①



3.

Figure ②



Le monde du travail

Page 53

1. a) 1) $\vec{v}_1 = (14 \times \cos 72°, 14 \times \sin 72°)$, soit $\approx (4{,}33, 13{,}31)$.

2) $\vec{v}_2 = (20 \times \cos 141°, 20 \times \sin 141°)$, soit $\approx (-15{,}54, 12{,}59)$.

b) 1) On a :

- $\vec{w}_1 = \left(\|\vec{w}_1\| \times \cos 120°, \|\vec{w}_1\| \times \sin 120°\right)$, soit $\approx \left(-0{,}5\|\vec{w}_1\|, 0{,}87\|\vec{w}_1\|\right)$;
- $\vec{w}_2 = \left(\|\vec{w}_2\| \times \cos 39°, \|\vec{w}_2\| \times \sin 39°\right)$, soit $\approx \left(0{,}78\|\vec{w}_2\|, 0{,}63\|\vec{w}_2\|\right)$.

Puisque $m_1\vec{w}_1 + m_2\vec{w}_2 = \frac{2}{3}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)$, on peut écrire l'équation suivante.

$450\left(-0{,}5\|\vec{w}_1\|, 0{,}87\|\vec{w}_1\|\right) + 525\left(0{,}78\|\vec{w}_2\|, 0{,}63\|\vec{w}_2\|\right) \approx \frac{2}{3}(450(4{,}33, 13{,}31) + 525(-15{,}54, 12{,}59))$

$\left(-225\|\vec{w}_1\| + 408\|\vec{w}_2\|, 389{,}71\|\vec{w}_1\| + 330{,}39\|\vec{w}_2\|\right) \approx (-4142{,}15, 8399{,}68)$

On en déduit le système d'équations suivant.

$-225\|\vec{w}_1\| + 408\|\vec{w}_2\| \approx -4142{,}15$

$398{,}7\|\vec{w}_1\| + 330{,}39\|\vec{w}_2\| \approx 8399{,}68$

En résolvant ce système, on obtient $\|\vec{w_1}\| \approx 20{,}55$ m/s.

La vitesse du véhicule ① immédiatement après la collision est environ de 20,55 m/s et son orientation est de 120°.

2) En substituant 20,55 m/s à $\|\vec{w_1}\|$ dans l'une des équations du système de la question précédente, on trouve $\|\vec{w_2}\| \approx 1{,}18$ m/s.

La vitesse du véhicule ② immédiatement après la collision est environ de 1,18 m/s et son orientation est de 39°.

Vue d'ensemble

Page 54

1. a) $\vec{v} \approx (^-13{,}26, ^-8{,}95)$ **b)** $\vec{v} \approx (^-83{,}5, 217{,}52)$

c) $\vec{v} \approx (0{,}53, ^-0{,}38)$ **d)** $\vec{v} \approx (^-0{,}65, ^-1{,}89)$

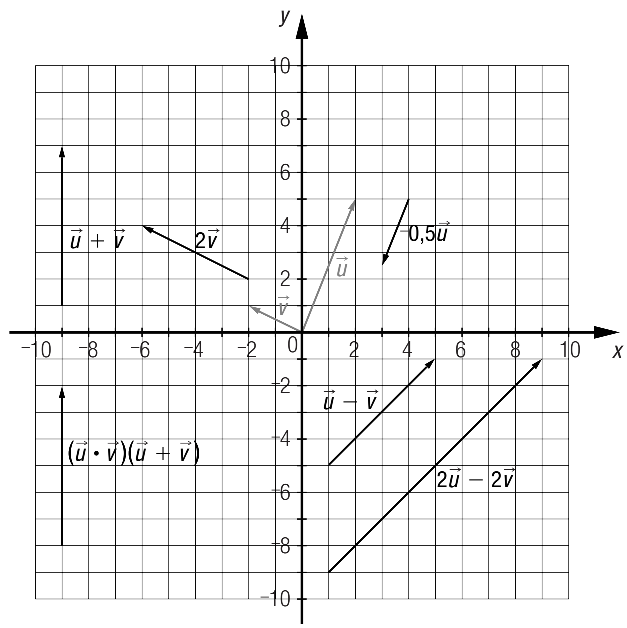
e) $\vec{v} \approx (46{,}76, 14{,}3)$ **f)** $\vec{v} \approx (559{,}19, 829{,}04)$

2. a) $\|\vec{v}\| = \sqrt{233}$; orientation : ≈ 58,39°. **b)** $\|\vec{w}\| = 2\sqrt{10}$; orientation : ≈ 251,57°.

c) $\|\vec{u}\| = \sqrt{317}$; orientation : ≈ 51,84°. **d)** $\|\vec{t}\| = \sqrt{11\,425{,}21}$; orientation : ≈ 160,09°.

e) $\|\vec{m}\| = 3\sqrt{2}$; orientation : 135°. **f)** $\|\vec{n}\| = \frac{\sqrt{13}}{6}$; orientation : ≈ 326,31°.

3. *Plusieurs réponses possibles. Exemple :*



Vue d'ensemble (*suite*)

Page 55

4. a) $2{,}5\cos(52° - 23°) \approx 2{,}19$ **b)** $13\cos(180° - 158° + 11°) \approx 10{,}9$

c) $24\cos(180° - (124° + 10°)) \approx 16{,}67$ **d)** $312\cos(180° - (216° - 83°)) \approx 212{,}78$

5. a) A, E et H. **b)** C, D et I. **c)** A et H. **d)** F

Vue d'ensemble (*suite*)

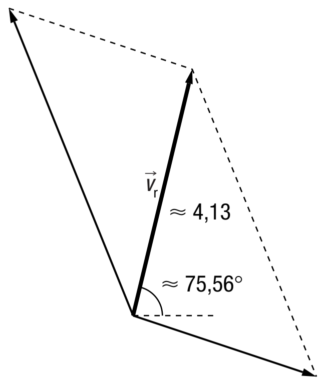
Page 56

6. a) $\vec{v} = \frac{54}{139}\vec{u}$ **b)** $\vec{v} = \frac{331}{184}\vec{u}$ **c)** $\vec{v} = ^-\frac{12}{7}\vec{u}$

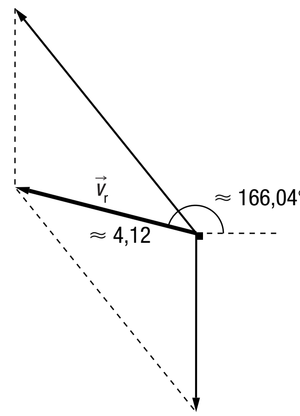
d) $\vec{v} = ^-10\vec{u}$ **e)** $\vec{v} = 0{,}75\vec{u}$ **f)** $\vec{v} = \frac{1}{m+n}\vec{u}$

7. a) On a $\vec{v}_r = \vec{v}_c + \vec{v}_l$.

1)

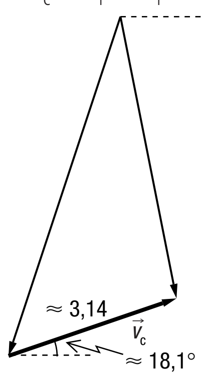


2)

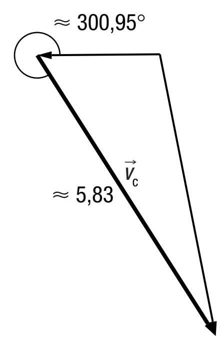


b) On a $\vec{v}_c = \vec{v}_r + \vec{v}_l$.

1)



2)



Vue d'ensemble (*suite*) — Page 57

8. a) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \approx 5{,}37$; orientation : $\approx$ 52,41°.
b) $\|\vec{w} - \vec{z}\| \approx 8{,}59$; orientation : $\approx$ 254,51°.
c) $\|\vec{g} - \vec{h}\| \approx 15{,}23$; orientation : $\approx$ 66,8°.
d) $\|\vec{i} + \vec{k} - \vec{j}\| \approx 21{,}4$; orientation : $\approx$ 127,41°.

9. a) $\approx -15{,}4$ **b)** $\approx 3{,}6$ **c)** $\approx 27{,}9$ **d)** -109 **e)** $-23{,}76$ **f)** $-13\,858$

10. a) $\approx$ 78,69° **b)** $\approx$ 68,57° **c)** $\approx$ 86,48° **d)** 45° **e)** $\approx$ 28,91° **f)** $\approx$ 78,58°

11. a) $\overrightarrow{AB}$ **b)** $\overrightarrow{AC}$ **c)** $\overrightarrow{AB}$ **d)** $\vec{0}$ **e)** $\vec{0}$ **f)** $\overrightarrow{AD}$

12. a) (5, −2) ou (−5, 2). **b)** (2, 5) **c)** $\left(-\frac{4}{3}, \frac{-10}{3}\right)$

Vue d'ensemble (*suite*) — Page 58

13. a) Soit $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (ka, kb)$, on a :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (a, b) \cdot (ka, kb) = ka^2 + kb^2 = k(a^2 + b^2)$

De plus, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$ où :

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{(ka)^2 + (kb)^2} = \sqrt{k^2a^2 + k^2b^2} = \sqrt{k^2(a^2 + b^2)} = -k\sqrt{a^2 + b^2}$, puisque $\sqrt{k^2} = |k| = -k$, si $k < 0$.

On peut donc poser l'égalité suivante.

$$\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)\left(-k\sqrt{a^2 + b^2}\right)\cos\theta = k(a^2 + b^2)$$
$$-k\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)\cos\theta = k(a^2 + b^2)$$
$$-k(a^2 + b^2)\cos\theta = k(a^2 + b^2)$$
$$\cos\theta = \frac{k(a^2 + b^2)}{-k(a^2 + b^2)} = -1$$
$$\theta = \arccos -1 = 180°$$

b) Soit $\vec{u} = (a, 2a)$ et $\vec{v} = (2a, a)$, on a :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (a, 2a) \cdot (2a, a) = 2a^2 + 2a^2 = 4a^2$

De plus, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\theta$, où :

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = \sqrt{5}|a|$
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = \sqrt{5}|a|$

On peut donc poser l'égalité suivante.

$$\sqrt{5}|a|\sqrt{5}|a|\cos\theta = 4a^2$$
$$5a^2\cos\theta = 4a^2$$
$$\cos\theta = \frac{4a^2}{5a^2} = \frac{4}{5}$$
$$\theta = \arccos\frac{4}{5}\text{, soit} \approx 37°.$$

14. a) L'orientation du vecteur recherché est de 315°. Ses composantes sont donc $(6\cos 315°, 6\sin 315°)$, soit $\approx (4{,}24, -4{,}24)$.

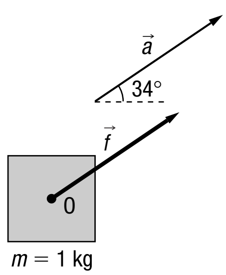
b) L'orientation du vecteur recherché est de 114° ou de 294°. Ses composantes sont donc $(1\cos 114°, 1\sin 114°)$, soit $\approx (-0{,}41, 0{,}91)$ ou $(1\cos 294°, 1\sin 294°)$, soit $\approx (0{,}41, -0{,}91)$.

c) On sait que $\vec{u} \cdot \overrightarrow{CD} = \|\vec{u}\| \times \|\overrightarrow{CD}\| \times \cos\theta = 20$. On a donc :

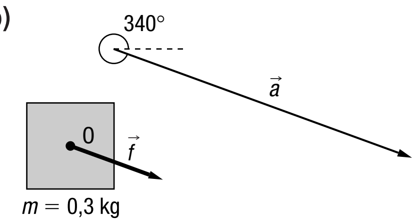
$20 = \|\vec{u}\| \times 6{,}1 \times \cos 45°$ et $\|\vec{u}\| \approx 4{,}64$.

L'orientation de $\vec{u}$ est de 69° ou 339°. Ses composantes sont donc $\approx (4{,}64\cos 69°, 4{,}64\sin 69°)$, soit $\approx (1{,}66, 4{,}33)$ ou $\approx (4{,}64\cos 339°, 4{,}64\sin 339°)$, soit $\approx (4{,}33, -1{,}66)$.

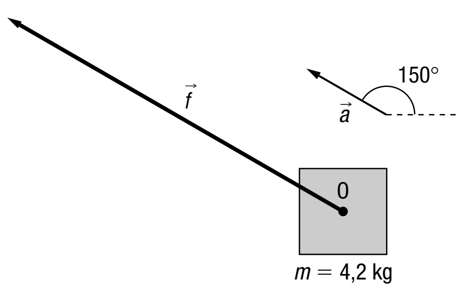
15. a)



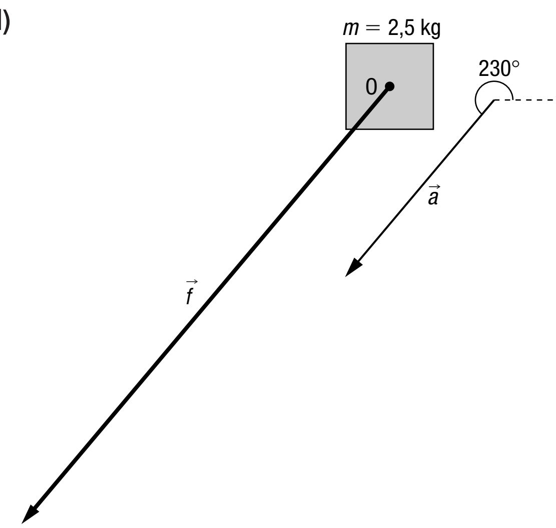
b)



c)



d)



Vue d'ensemble (*suite*) **Page 59**

16. Les composantes qui correspondent à la somme des déplacements sont $(-4 + -4 + -1 + -2 + -3 + 5, 5 + -2 + -2 + 7 + 1 + 1)$, soit $(-9, 10)$.

Les composantes du déplacement associé au retour au port sont donc $(9, -10)$.

La norme du déplacement est $\sqrt{9^2 + (-10)^2}$, soit $\approx 13{,}45$ km.

L'orientation du déplacement est de $360° - \arctan\frac{10}{9}$, soit $\approx 311{,}99°$.

17. a) Aire de chaque hémisphère : $A = \frac{4\pi r^2}{2} = \frac{4\pi 40^2}{2} \approx 10\,053{,}1\ \text{cm}^2 = 1{,}005\ \text{m}^2$.

$\|\vec{f_1}\| \approx 101 \times 1{,}005 \approx 101{,}54$ kN ou 101 540 N.

$\|\vec{f_2}\| \approx 101 \times 1{,}005 \approx 101{,}54$ kN ou 101 540 N.

b) Puisque 101 540 ÷ 200 ≈ 507,5, il faut au moins 508 personnes d'un côté de l'hémisphère et 508 personnes de l'autre côté, soit un total d'au moins 1016 personnes pour séparer les deux hémisphères.

Vue d'ensemble (*suite*)

Page 60

18. a) ① Les diagonales du quadrilatère ABCD se coupent en leur milieu.

② Par la relation de Chasles.

③ Puisque $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{DP}$, on peut substituer $\overrightarrow{PC}$ à $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{PB}$ à $\overrightarrow{DP}$ à l'étape ②.

④ L'addition de vecteurs est commutative.

⑤ Par la relation de Chasles.

b)

① $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PB}$ et $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PC}$	Par l'énoncé.
② $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PA}$	Par la relation de Chasles.
③ $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DP} - \overrightarrow{AP}$	Car $\overrightarrow{PA}$ est l'opposé de $\overrightarrow{AP}$.
④ $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC}$	Puisque $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PB}$ et $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PC}$, on peut substituer $\overrightarrow{PB}$ à $\overrightarrow{DP}$ et $\overrightarrow{PC}$ à $\overrightarrow{AP}$ à l'étape ③.
⑤ $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{CP}$	Car $\overrightarrow{PC}$ est l'opposé de $\overrightarrow{CP}$.
⑥ $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PB}$	L'addition de vecteurs est commutative.
⑦ $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$	Par la relation de Chasles.

19. a) ≈ 4,9 m/s²

b) ≈ 49 m/s

c) 245 m

Vue d'ensemble (*suite*)

Page 61

20. a) 1) Puisque $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA} = 4 \times 1 + {}^-1 \times 4 = 0$, on en déduit que m ∠BAD = 90°.

2) On a :

- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (4, {}^-1) + (1, {}^-3) = (5, {}^-4)$, et $\|\overrightarrow{AC}\| \approx 6{,}4$;
- $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = (1, 4) + (4, {}^-1) = (5, 3)$, et $\|\overrightarrow{DB}\| \approx 5{,}83$.

Puisque $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 5 \times 5 + {}^-4 \times 3 = 13$, on en déduit que :

$\|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{DB}\| \times \cos\theta = 13$

$6{,}4 \times 5{,}83 \times \cos\theta \approx 13$

$\theta \approx \arccos\frac{13}{6{,}4 \times 5{,}83}$, soit ≈ 69,61°.

Puisque l'angle COB correspond à l'angle formé par les deux vecteurs et que les angles COB et AOD sont opposés par le sommet, on en déduit que m ∠AOD = m ∠COB = θ, soit environ 69,61°.

b) Puisque $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH}$, on a :

$\overrightarrow{EG} = (a, b) + (a, {}^-b) = (2a, 0)$

$\overrightarrow{FH} = (a, {}^-b) + ({}^-a, {}^-b) = (0, {}^-2b)$

$\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{FH} = (2a, 0) \cdot (0, {}^-2b) = 2a \times 0 + 0 \times {}^-2b = 0$

Puisque le produit scalaire est nul, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont orthogonaux. On en déduit que les diagonales du losange EFGH sont perpendiculaires.

21. a) $\|\vec{v}_0\| \approx 11{,}18$ m/s

Orientation de $\|\vec{v}_0\|$: $\approx 63{,}43°$.

b) $\vec{v}_v = (0, 10) + 2(0, -9{,}8) = (0, -9{,}6)$

Cela signifie que le projectile aura une vitesse de 9,6 m/s dirigée vers le bas.

c) $\vec{v}_v = \vec{v}_{vi} + \vec{g}t = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_{vi} = -\vec{g}t$

$\vec{v}_{vi} = -\vec{g}t$

$(0, 10) = -(0, -9{,}8)t$

$10 = 9{,}8t$

$t \approx 1{,}02$ s

La vitesse verticale sera nulle après environ 1,02 s.

d) $\vec{v}_v = \vec{v}_{vi} + \vec{g}t = (0, 10) + 5(0, -9{,}8) = (0, -39)$

$\vec{v}_h = (5, 0)$

$\vec{v} = \vec{v}_h + \vec{v}_v = (5, 0) + (0, -39) = (5, -39)$

$\|\vec{v}\| \approx 39{,}32$ m/s

Orientation de $\vec{v}$: $\approx 277{,}31°$.

22. a) $\overrightarrow{PA} + (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{\mathbf{AB}}) + (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{BC}}) = \vec{0}$

b) $(a, b) + ((a, b) + (6, -8)) + ((a, b) + (6, -8) + (-10, 2)) = \vec{0}$

c) $(3a, 3b) + (2, -14) = \vec{0}$

Donc, $3a = -2$ et $a = -\frac{2}{3}$.

$3b = 14$ et $b = \frac{14}{3}$.

d) Puisque $\overrightarrow{PA} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right)$, on a :

- $\overrightarrow{PC} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right) + (6, -8) + (-10, 2) = \left(-\frac{14}{3}, -\frac{4}{3}\right)$;
- $\|\overrightarrow{PC}\| = \sqrt{\left(-\frac{14}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2}$, soit $\approx 4{,}85$.

La distance qui sépare le centre de gravité du sommet C est environ de 4,85.

Banque de problèmes

Page 62

1. $\|\vec{v}\| = 10$ km/h $= 10\,000$ m $\div$ 3600 s $\approx 2{,}78$ m/s

Les composantes de $\vec{v}$ sont environ $(2{,}78 \times \cos 15°, 2{,}78 \times \sin 15°)$, soit environ $(2{,}68, 0{,}72)$.

Les composantes de $\vec{u}$ sont $(0{,}5 \times \cos 30°, 0{,}5 \times \sin 30°)$, soit environ $(0{,}43, 0{,}25)$.

Puisque $\vec{u} = 0{,}1\vec{v} + \vec{w}$, on a :

$\vec{w} = \vec{u} - 0{,}1\vec{v}$

$\vec{w} \approx (0{,}43, 0{,}25) - 0{,}1(2{,}68, 0{,}72)$, soit $\approx (0{,}16, 0{,}18)$.

$\|\vec{w}\| \approx \sqrt{(0{,}16)^2 + (0{,}18)^2}$, soit $\approx 0{,}24$ m/s.

Orientation de $\vec{w}$: $\approx \arctan\frac{0{,}18}{0{,}16}$, soit $\approx 47{,}24°$.

Le golfeur doit donner à sa balle une vitesse d'environ 0,24 m/s orientée à environ 47,24°.

2. Les renseignements fournis sur le dessin nous montrent que :

- l'aire du quadrilatère AEFG est donnée par m $\overline{AG}$ $\times$ m $\overline{AE}$;
- m $\overline{AE}$ = m $\overline{AC}$ = $\|\overrightarrow{AC}\|$;
- m $\overline{AG}$ = m $\overline{AB}$ $\times \cos\theta = \|\overrightarrow{AB}\| \times \cos\theta$.

Calculer l'aire du rectangle AEFG revient donc à multiplier la norme de $\overrightarrow{AC}$ par la norme de $\overrightarrow{AB}$ et par le cosinus de l'angle compris entre $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Or, cette chaîne d'opérations correspond à la définition du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Banque de problèmes (*suite*)

Page 63

3. Le produit scalaire de ces vecteurs est donné par $(a, ka) \bullet (ka, a)$. On a donc : $(a, ka) \bullet (ka, a) = ka^2 + ka^2 = 2ka^2$.
Or, cette expression est aussi égale au produit des normes de ces vecteurs par le cosinus de l'angle θ formé par ces vecteurs. On a donc :

$$\sqrt{a^2 + (ka)^2}\,\sqrt{(ka)^2 + a^2}\cos\theta = 2ka^2$$
$$a^2(1 + k^2)\cos\theta = 2ka^2$$
$$\cos\theta = \frac{2ka^2}{a^2(1 + k^2)}$$
$$\cos\theta = \frac{2k}{(1 + k^2)}$$
$$\theta = \arccos\frac{2k}{(1 + k^2)}$$

4. En suivant la première série de directives, on peut écrire :
soit (c, d), un vecteur unitaire orthogonal au vecteur (a, b) : $(c, d) \bullet (a, b) = ac + bd.$
En suivant la deuxième série de directives, on peut écrire :

$$ac + bd = 0$$
$$ac = ^-bd$$
$$c = \frac{^-bd}{a}$$

En suivant la troisième série de directives, on peut écrire :

$$c^2 + d^2 = 1$$
$$\left(\frac{^-bd}{a}\right)^2 + d^2 = 1$$
$$\frac{b^2d^2}{a^2} + d^2 = 1$$
$$d^2\left(\frac{b^2}{a^2} + 1\right) = 1$$
$$d^2\left(\frac{b^2 + a^2}{a^2}\right) = 1$$
$$d^2 = \frac{a^2}{b^2 + a^2}$$
$$d = \pm\sqrt{\frac{a^2}{b^2 + a^2}}$$
$$d = \pm\frac{a}{\sqrt{b^2 + a^2}}$$

En suivant la quatrième série de directives, on peut écrire :

si $d = \frac{a}{\sqrt{b^2 + a^2}}$, on a :

$$c = \frac{^-bd}{a} = \frac{^-b\left(\frac{a}{\sqrt{b^2 + a^2}}\right)}{a} = \frac{^-ab}{a\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{^-b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

si $d = ^-\frac{a}{\sqrt{b^2 + a^2}}$, on a :

$$c = \frac{^-bd}{a} = \frac{^-b\left(\frac{^-a}{\sqrt{b^2 + a^2}}\right)}{a} = \frac{ab}{a\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Les deux vecteurs unitaires orthogonaux au vecteur (a, b) sont $\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{^-a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$ et $\left(\frac{^-b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$.

Banque de problèmes (*suite*)

Page 64

5. On remarque que, dans chaque cas :
- la norme du vecteur w correspond à la valeur de l'aire du parallélogramme ABCD ;
- $\vec{u}$ est superposé à la base du parallélogramme. On en déduit que la mesure de la base vaut $\|\vec{u}\|$;
- $\vec{v}$ est superposé au côté du parallélogramme. On en déduit que la mesure du côté vaut $\|\vec{v}\|$;

- la hauteur h du parallélogramme correspond au côté opposé à l'angle θ dans un triangle rectangle où $\vec{v}$ est superposé à l'hypoténuse. On en déduit que $h = \|\vec{v}\| \times \sin\theta$;
- l'aire du parallélogramme est donnée par le produit des mesures de sa base par sa hauteur et correspond à $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin\theta$.

On en conclut que l'expression algébrique qui permet de calculer $\|\vec{w}\|$ est la même que celle qui permet de calculer l'aire du parallélogramme.
On a donc : $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin\theta$

6. On sait que $35\vec{v}_A + 35\vec{v}_B + 150\vec{v}_{satellite} = 220\vec{v}_{fusée}$.
$\vec{v}_A = (4 \times \cos 47°, 4 \times \sin 47°)$, soit $\approx (2{,}73, 2{,}93)$.
$\vec{v}_B = (5 \times \cos 32°, 5 \times \sin 32°)$, soit $\approx (4{,}24, -2{,}65)$.
$\vec{v}_{satellite} = (7 \times \cos 24°, 7 \times \sin 24°)$, soit $\approx (6{,}4, 2{,}85)$.
On a donc :
$220\vec{v}_{fusée} \approx 35(2{,}73, 2{,}93) + 35(4{,}24, -2{,}65) + 150(6{,}4, 2{,}85)$
$220\vec{v}_{fusée} \approx (1203{,}95, 437{,}3)$
$\vec{v}_{fusée} \approx \frac{1}{220}(1203{,}95, 437{,}3)$
$\vec{v}_{fusée} \approx (5{,}47, 1{,}99)$
$\|\vec{v}_{fusée}\| \approx \sqrt{5{,}47^2 + 1{,}99^2}$, soit $\approx 5{,}82$ km/s.
Orientation de $\vec{v}_{fusée}$: $\approx \arctan\frac{1{,}99}{5{,}47}$, soit $\approx 20°$.

Banque de problèmes (*suite*)

7. La norme de la traînée est $0{,}06 \times 1{,}5 \times 9 \times \frac{32^2}{2}$, soit 414,72 N.

La norme de la portance est $0{,}4 \times 1{,}5 \times 9 \times \frac{32^2}{2}$, soit 2764,8 N.
On en déduit que :
- traînée : $(414{,}72 \times \cos 7°, 414{,}72 \times \sin 7°) \approx (411{,}63, 50{,}54)$;
- portance : $(2764{,}8 \times \cos 97°, 2764{,}8 \times \sin 97°) \approx (-336{,}94, 2744{,}19)$;
- résultante aérodynamique : $(411{,}63 - 336{,}94, 50{,}54 + 2744{,}19) \approx (74{,}69, 2794{,}73)$;
- poids : $(0, -2800)$.

Les composantes du vecteur qui correspond à la somme du poids et de la résultante aérodynamique sont environ $(74{,}69 + 0, 2794{,}73 + -2800)$, soit environ $(74{,}69, -5{,}27)$.
La norme de ce vecteur est donc $\sqrt{74{,}69^2 + (-5{,}27)^2}$, soit environ 74,88 N.
L'orientation de ce vecteur est donc de $360° - \arctan\frac{5{,}27}{74{,}69}$, soit environ de 355,96°.