Mathématiques 536
Réflexion 6
Tome 2

COMMISSION
SCOLAIRE DE LAVAL

Guy Breton

5e SECONDAIRE

Réflexions mathématiques 536

TOME 2

C•O•R•R•I•G•É

DU MANUEL DE L'ÉLÈVE

CEC
LES ÉDITIONS CEC INC.

8101, boul. Métropolitain Est, Anjou, Qc, Canada H1J 1J9
Téléphone : (514) 351-6010 Télécopieur : (514) 351-3534

Nous avons indiqué, pour chaque composante des rubriques *Maîtrise*, la lettre correspondant au code de couleurs utilisé dans le manuel. Vous trouverez, à la page III du manuel, tome 2, la signification de ce code de couleurs.

B : bleu

V : vert

R : rouge

N : noir

J : jaune

R·É·F·L·E·X·I·O·N 6

page 122

Les deux véhicules

a) Il y aura 4 personnes dans le premier véhicule et 3 personnes dans le deuxième.

b) On ne peut pas le dire, car on ne sait pas dans quel sens et dans quelle direction les deux véhicules roulent.

c) S'ils roulent dans le même sens, le deuxième véhicule devancera le premier de 8 km ou de 12 km. S'ils roulent en sens contraire, les deux véhicules seront à 212 km ou à 208 km l'un de l'autre.

d) Le deuxième véhicule devancera le premier de 8 km ou de 12 km.

e) Le déplacement d'un bateau et le déplacement d'un avion.

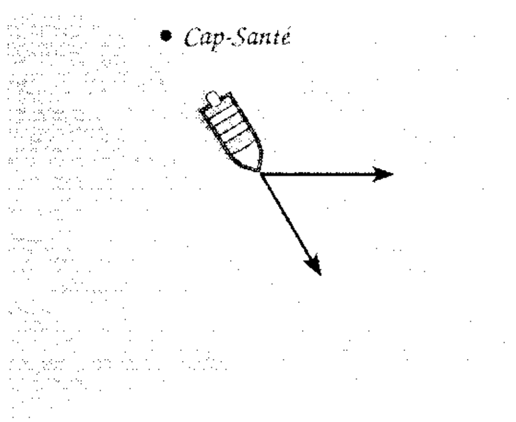
f) 1) Les deux voitures roulent sur l'autoroute 20.
2) Les deux voitures roulent vers Québec.

page 123

g) 1) Scalaire. 2) Vectorielle.
3) Scalaire. 4) Vectorielle.
5) Scalaire. 6) Vectorielle.

L'effet du courant

a)



b) 1) La longueur de la flèche.
2) L'inclinaison de la flèche par rapport à l'horizontale.
3) La position de la pointe de la flèche.

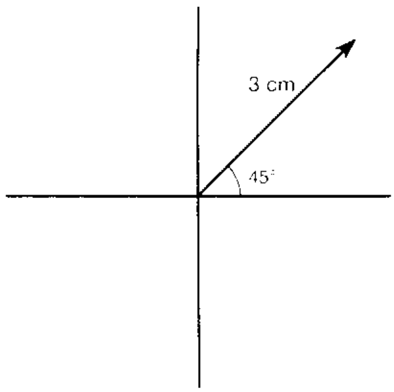
page 124

c) 1) En les mesurant et en tenant compte de l'échelle donnée, on aura :
- vecteur 1 : 38 N;
- vecteur 2 : 63 N;
- vecteur 3 : 18 N.

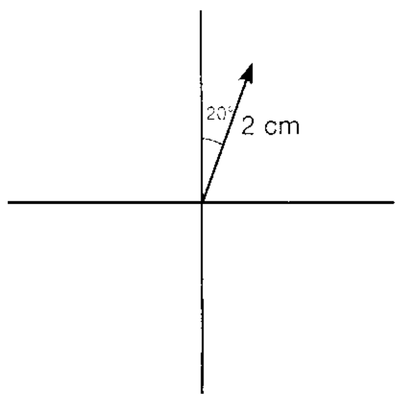
2) Vecteur 1 : horizontal.
Vecteur 2 : vertical.
Vecteur 3 : horizontal.

3) Vecteur 1 : il pointe vers l'est ou vers la droite.
Vecteur 2 : il pointe vers le sud ou vers le bas.
Vecteur 3 : il pointe vers l'ouest ou vers la gauche.

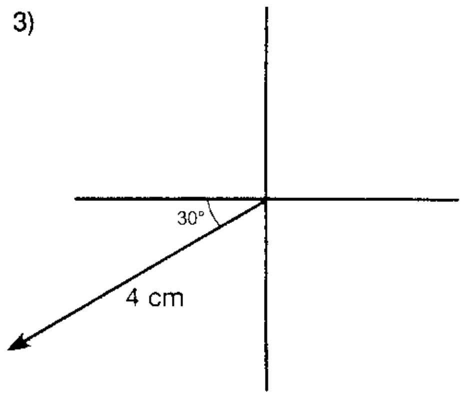
d) 1)



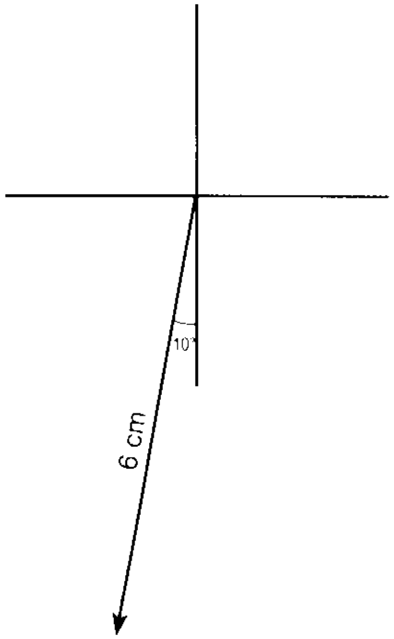
2)



3)



4)



e) Vecteur 1 : 37,9 m, N. 30° E.
Vecteur 2 : 49,8 m, E. 23° S.

page 125

f) 1) 3,6 cm, 75°.
2) 4,8 cm, 12°.
3) 3,7 cm, 162°.
4) 2,1 cm, 222°.

g) 3,25 cm, orientation 42°.

page 126

h) Il y a quatre vecteurs différents.

i) 1) $\vec{m}$ et $\vec{s}$
2) $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{s}$
$\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\vec{k}$
3) Aucun.

j) $\overline{AB}$ est un segment et $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur dont l'origine est A et l'extrémité est B.

page 127

Une petite discussion

a) 1) Vecteur : quantité qui a une grandeur, une direction et un sens.

Translation : transformation du plan qui associe un point à un autre point, selon une grandeur, une direction et un sens.

2) La représentation est la même : une flèche.

b) À la translation identité : $t_{(0,\,0)}$.

c) Un vecteur correspondrait à une translation.

Le facteur de la baie

a) Le point O.

b) $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EO}$.

c) $\overrightarrow{OB}$: (3, -2), $\overrightarrow{BA}$: (-1, 2), $\overrightarrow{AC}$: (2, 3), $\overrightarrow{CF}$: (-2, 1), $\overrightarrow{FD}$: (-1, -2), $\overrightarrow{DE}$: (-2, 1), $\overrightarrow{EO}$: (1, -3)

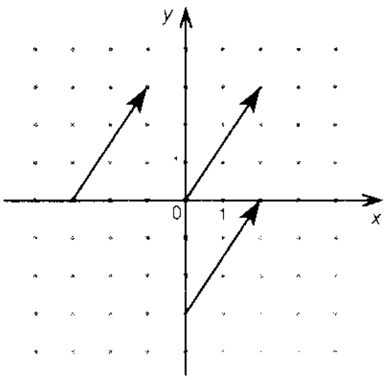
d) Chaque vecteur a une composante horizontale et une composante verticale. Ces deux nombres donnent l'orientation du vecteur.

e) Un vecteur (x, y) a pour composante horizontale un vecteur horizontal de longueur $|x|$ et pour composante verticale un vecteur vertical de longueur $|y|$.

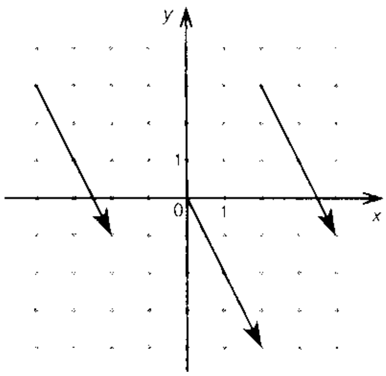
page 128

f) (Autres réponses possibles.)

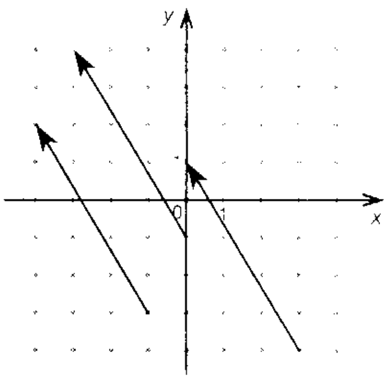
1)



2)



3)



g) Les coordonnées de l'extrémité de la flèche nous donnent les composantes horizontale et verticale du vecteur.

h) 1) $\overrightarrow{AB} = (-6, -4)$ 2) $\overrightarrow{CD} = (5, 1)$

i) 1) $\overrightarrow{EF} = (4, -2)$ 2) $\overrightarrow{GH} = (-9, 5)$

page 129

j) $\sqrt{74} \approx 8{,}6$

k) $\tan A = \dfrac{m\ \overline{BC}}{m\ \overline{AC}}$

l) La mesure de l'angle *BAC*.

m) Oui.

n) (0, 0)

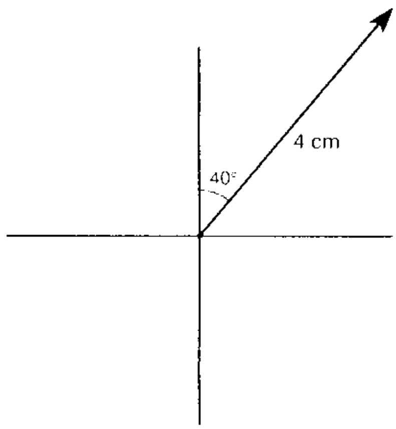
Investissement 1

1. ***a)*** Scalaire. ***b)*** Vecteur.

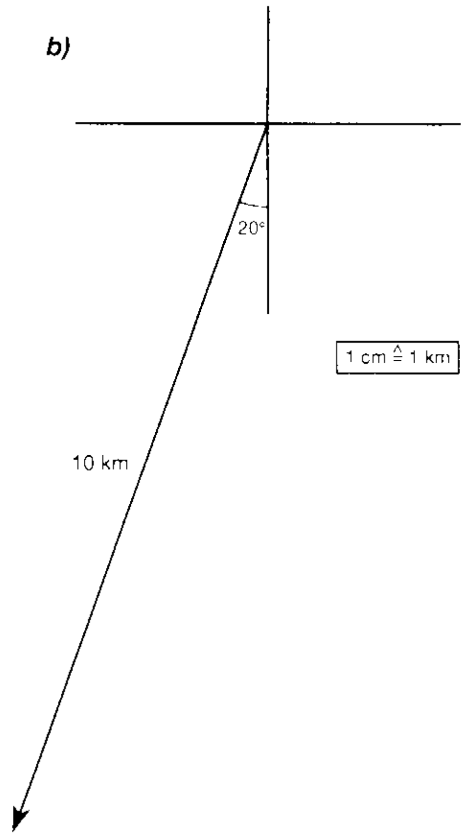
c) Vecteur. ***d)*** Vecteur.

e) Scalaire.

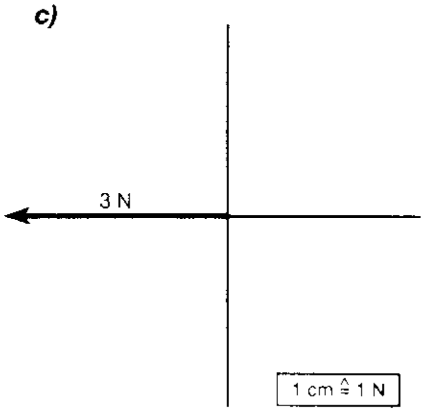
2. ***a)***



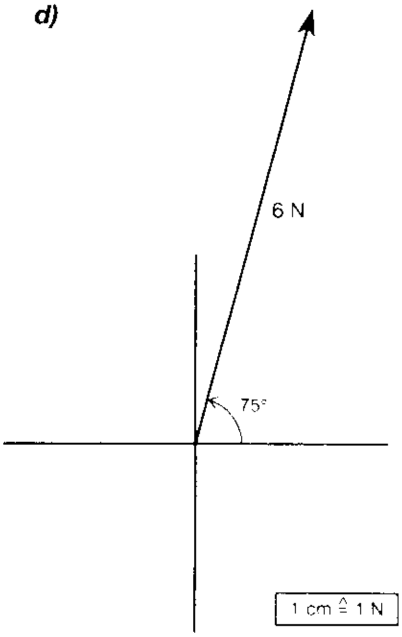
b)



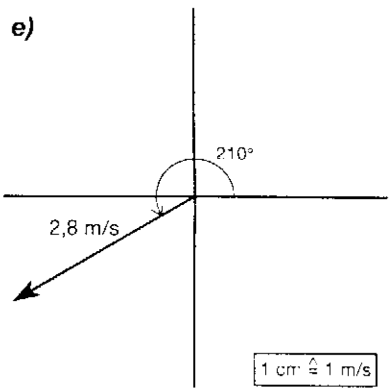
c)



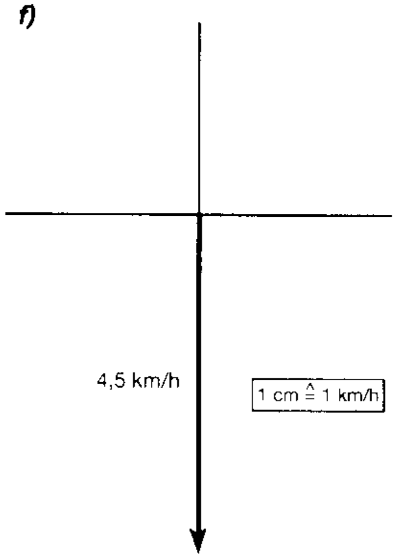
d)



e)



f)



page 130

3. ***a)*** 3,68 m, orientation 40° ou 3,68 m, N. 50° E.

b) 2,94 N, orientation 230° ou 2,94 N, O. 50° S.

c) 370 km/h, orientation 30° ou 370 km/h, E. 30° N.

d) 3,3 m/s², orientation 240° ou 3,3 m/s², S. 30° O.

4. ***a)*** $\overrightarrow{CO}$ et $\overrightarrow{EF}$
$\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{KL}$

b) $\overrightarrow{CO}$ et $\overrightarrow{EF}$
$\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{KL}$
$\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{GH}$

c) $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{OP}$
$\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{IJ}$
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{QR}$

5. Sept vecteurs différents.

6. ***a)*** $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{KL}$
ou $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{KL}$

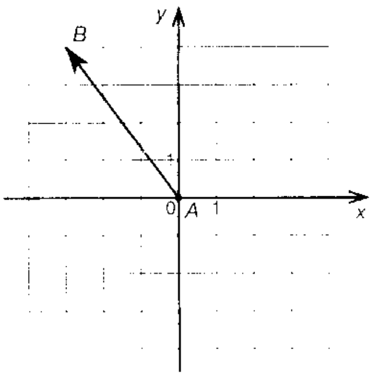
b) $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{MN}$
$\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$
$\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{GH}$
$\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{CO}$
$\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{EF}$
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{QR}$

7. $\vec{v} = (1, 4)$; $\vec{w} = (^-3, ^-2)$

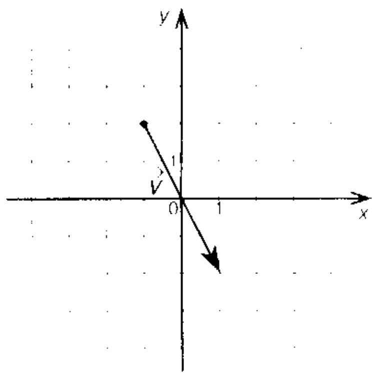
8. ***a)*** $\overrightarrow{AB} = (7, 2)$ ***b)*** $\overrightarrow{AB} = (^-9, 5)$

9. (Autres réponses possibles.)

a)



b)



page 131

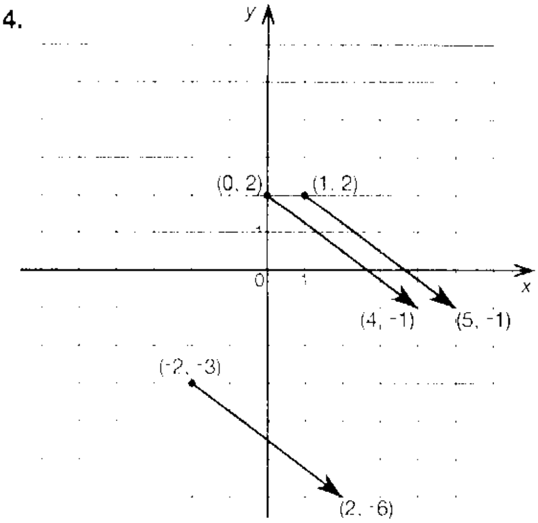
10. *a)* 0° *b)* 90° *c)* 45° *d)* ≈ 59°
e) ≈ 112° *f)* ≈ 252° *g)* ≈ 297° *h)* 270°

11. *a)* $2\sqrt{5} \approx 4{,}47$ *b)* $3\sqrt{2} \approx 4{,}24$
c) $2\sqrt{10} \approx 6{,}32$ *d)* 5

12. *a)* $\sqrt{74} \approx 8{,}6$ *b)* 5
c) 1 *d)* $\sqrt{85} \approx 9{,}22$

13. *a)* $\sqrt{34} \approx 5{,}83$, ≈ 239°
b) $4\sqrt{2} \approx 5{,}66$, 135°
c) 2, 90° *d)* 5, ≈ 233°

14.



15. *a)* Oui, car les flèches sont équipollentes.
b) Non, car les flèches sont opposées.

16. *a)* $B = C$ *b)* $A = B$
c) (Autres réponses possibles.)
ABCD est un parallélogramme.
d) m BC
e) $AB \parallel DC$ et $AD \parallel BC$

17. ≈ 11,2 m, 40° et ≈ 19,6 m, 117°

page 132

18. *a)* ≈ 11,59 m
b) ≈ 108,4°
c) 11 m, 90°
d) La direction de son tir.

Forum

a) Par un point.

b) Oui, ces deux vecteurs ont la même direction mais pas le même sens. On utilise un angle pour définir l'orientation et non la direction.

c) $\|\overrightarrow{OP}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

page 133

La table de billard

a) Ils n'ont pas la même grandeur, ni la même direction, ni le même sens.

b) Leurs flèches sont perpendiculaires.

c) Ils n'ont pas la même grandeur, ils ont la même direction mais pas le même sens.

d) (Autres réponses possibles.)
$\vec{v}$ et $\vec{u}$ ou $\vec{t}$ et $\vec{r}$

e) Ils n'ont pas la même grandeur, ils ont la même direction mais ils sont de sens contraire.

page 134

Investissement 2

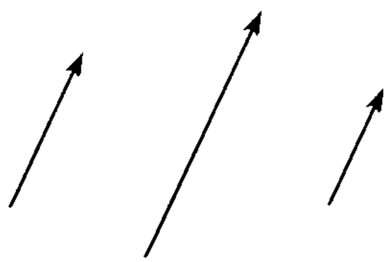
1. *a)* $-\vec{AB} = \vec{BA}$ *b)* $-\vec{v}$

c) $-\vec{u} = (-3, 2)$ *d)* 3 cm, S. 30° O.

2. *a)* Ils ont la même direction.

b) Ils ont la même norme.

3. (Autres réponses possibles.)



4. *a)* Colinéaires ou linéairement dépendants, horizontaux, de sens contraire, opposés, de même norme.

b) Perpendiculaires ou orthogonaux, linéairement indépendants.

c) Linéairement indépendants.

d) Colinéaires ou linéairement dépendants, opposés.

e) Colinéaires ou linéairement dépendants, horizontaux, de sens contraire.

f) Colinéaires ou linéairement dépendants, égaux.

page 135

5. *a)* (-6, -3) *b)* (0, -1)

c) (3, 0) *d)* (-4, 1) ou (-2, -5)

6. Ils sont opposés s'ils ont la même norme et la même direction.

7. *a)* Oui. *b)* Oui.

c) Non, car ils n'ont pas la même norme.

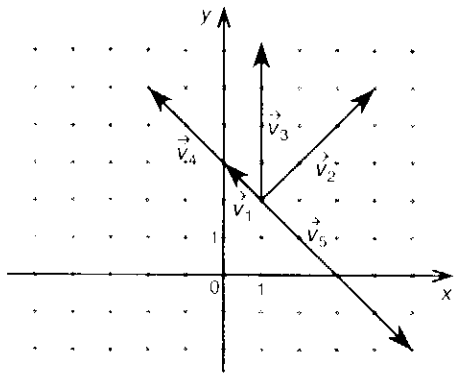
d) Oui.

8. Les composantes de l'un des vecteurs sont les opposés de celles de l'autre.

9. *a)* (3, -4) *b)* (0, -9) *c)* (-5, -4) *d)* (0, 0)

page 136

10. (Autres réponses possibles.)
a) à *e)*



11. 1° Si $\vec{u} = (a, b)$,
alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2° Si $\vec{u} = (a, b)$ alors $-\vec{u} = (-a, -b)$
et $\|-\vec{u}\| = \sqrt{(-a^2) + (-b^2)} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

3° Donc, $\|\vec{u}\| = \|-\vec{u}\|$.

Forum

a) Un vecteur a un seul vecteur opposé, mais plusieurs flèches. Deux vecteurs sont opposés s'ils ont la même norme et la même direction, mais qu'ils sont de sens contraire. Par ailleurs, il existe plusieurs flèches mais un seul vecteur.

b) Ce vecteur n'existe pas.

c) Oui, si l'on considère un vecteur quelconque et le vecteur nul.

d) 1) 3 vecteurs. *e)* 1) 4 paires.
2) 3 vecteurs. 2) 3 paires.

page 137

Tout un jeu!

a) $\|\vec{c}\| = 100$ m

b) Non.

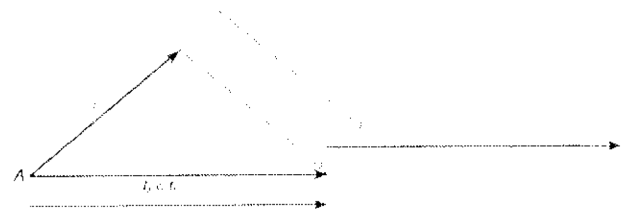
page 138

FEUILLE DE TRAVAIL 2

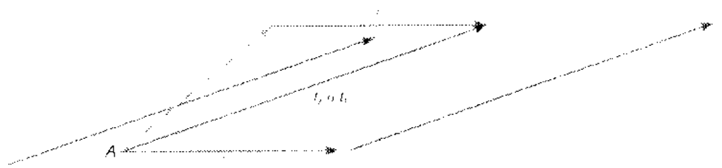
c) Explique comment composer les deux translations définies par les flèches illustrées. Trouve l'image de A par la composée $t_2 \circ t_1$ et trace quelques flèches de la composée.

On fait suivre les flèches des deux translations.

1)



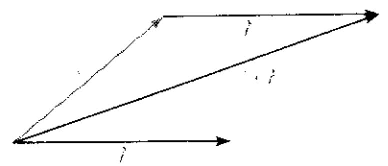
2)



d) Trace la flèche du vecteur somme, ou la résultante, dans chaque cas.

1.

2)



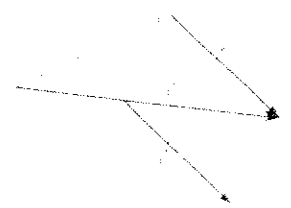
page 140

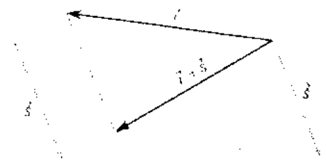
FEUILLE DE TRAVAIL 3

e) Dans chaque cas, trouve le vecteur somme en appliquant la méthode indiquée.

1) Méthode du triangle

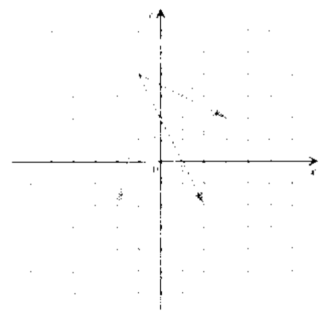
2) Méthode du parallélogramme





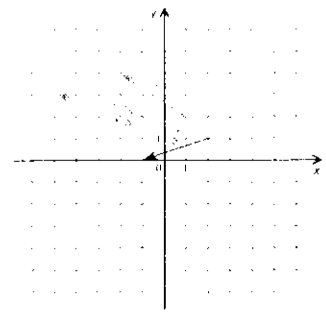
f) Détermine le vecteur somme dans chaque cas.

1)



$\vec{p} + \vec{q} = (3, -6)$

2)

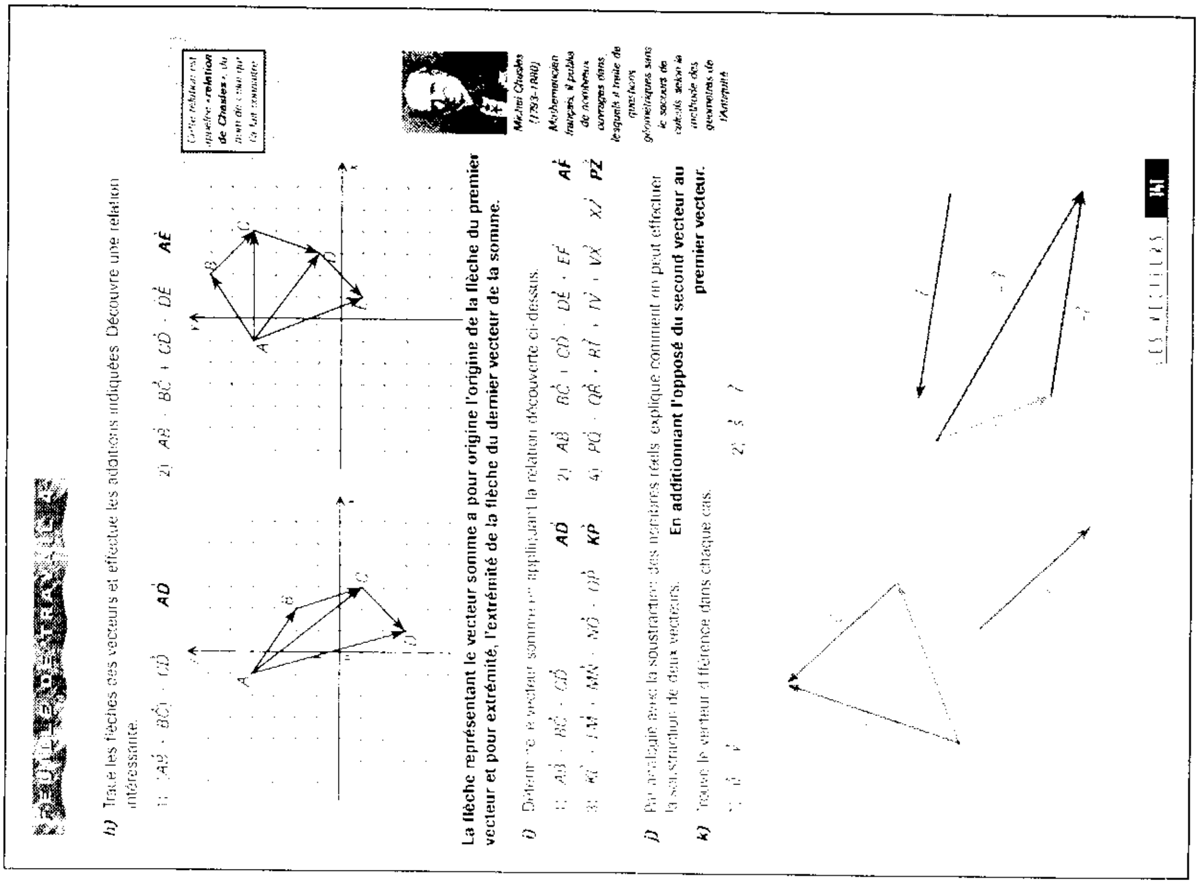


$\vec{r} + \vec{s} = (-6, 1)$

g) Quelle relation existe-t-il entre les composantes du vecteur somme et celles des vecteurs illustrés ci-dessus ?

Les composantes du vecteur somme correspondent à la somme des composantes horizontales et à la somme des composantes verticales des vecteurs : (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).

page 141



b) Trace les flèches des vecteurs et effectue les additions indiquées. Découvre une relation intéressante.

1) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$ **$\vec{AD}$** 2) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE}$ **$\vec{AE}$**

Cette relation est appelée « relation de Chasles », du nom de celui qui l'a fait connaître.

Michel Chasles (1793-1880) Mathématicien français, il publia de nombreux ouvrages dans lesquels il traite de questions géométriques sans le secours de calculs selon la méthode des géomètres de l'Antiquité.

La flèche représentant le vecteur somme a pour origine l'origine de la flèche du premier vecteur et pour extrémité, l'extrémité de la flèche du dernier vecteur de la somme.

i) Détermine le vecteur somme en appliquant la relation découverte ci-dessus.

1) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$ **$\vec{AD}$** 2) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EF}$ **$\vec{AF}$**

3) $\vec{KL} + \vec{LM} + \vec{MN} + \vec{NO} + \vec{OP}$ **$\vec{KP}$** 4) $\vec{PQ} + \vec{QR} + \vec{RT} + \vec{TV} + \vec{VX} + \vec{XZ}$ **$\vec{PZ}$**

j) Par analogie avec la soustraction des nombres réels explique comment on peut effectuer la soustraction de deux vecteurs. **En additionnant l'opposé du second vecteur au premier vecteur.**

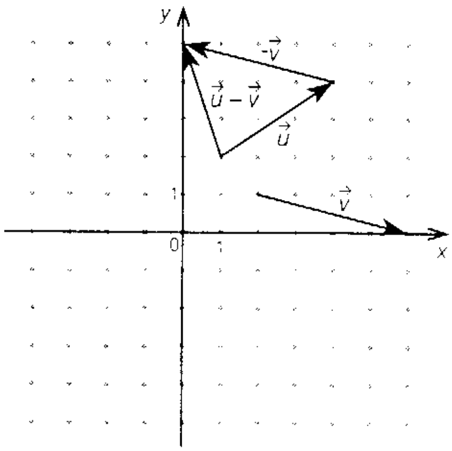
k) Trouve le vecteur différence dans chaque cas.

1) $\vec{u} - \vec{v}$ 2) $\vec{s} - \vec{r}$

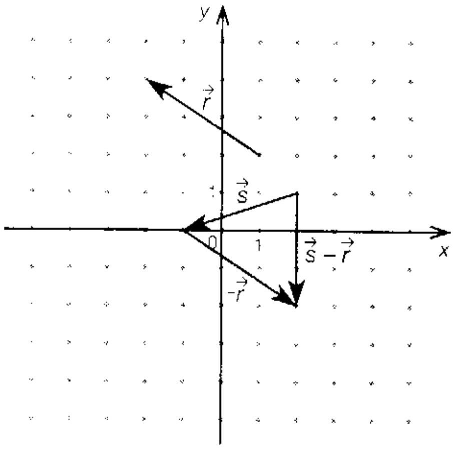
page 142

l) En soustrayant les composantes du second vecteur de celles du premier vecteur.

1) $\vec{u} - \vec{v} = (3, 2) - (4, -1)$
$= (3 - 4, 2 - -1)$
$= (-1, 3)$



2) $\vec{s} - \vec{r} = (-3, -1) - (-3, 2)$
$= (-3 - -3, -1 - 2)$
$= (0, -3)$



m) Ce sont les diagonales du parallélogramme formé par les deux vecteurs.

page 143

n) 1) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$ 2) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{ED}$

o) 1) $\overrightarrow{DC}$ 2) $\overrightarrow{NM}$

3) $\overrightarrow{HG}$ 4) $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP}$ (ou $\vec{0}$)

p) 1) $\vec{0}$ 2) $\vec{0}$

q) En appliquant la relation de Chasles pour l'addition de vecteurs, si l'origine de la flèche représentant le premier vecteur est également l'extrémité de la flèche représentant le dernier vecteur, on obtient le vecteur nul.

r) 1) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$
$\vec{0}$

2) $(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{DA}$
$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA}$
$\vec{0}$

page 144

s) 1) $\| \vec{u} + \vec{v} \| \approx 6{,}33$ cm

2) $\| \vec{u} - \vec{v} \| \approx 4{,}05$ cm

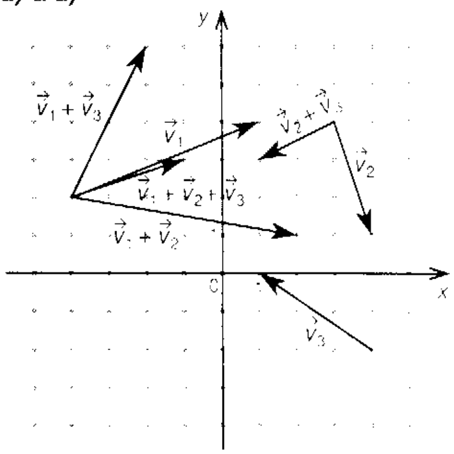
t) 1) $\approx 102{,}6°$ 2) $\approx 78{,}1°$

u) 1) $\| \vec{v} \| \approx 3{,}7$ cm 2) $\| \vec{t} + \vec{s} \| \approx 6{,}17$ cm

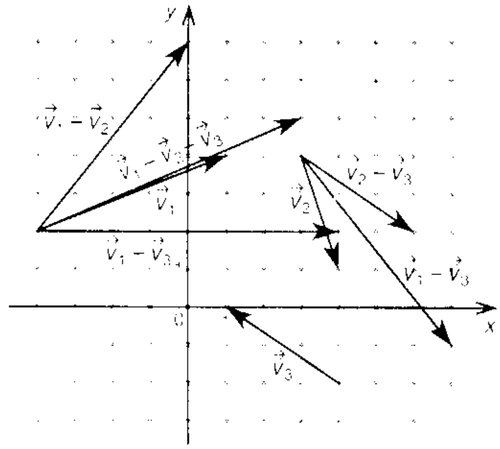
page 146

Investissement 3

1. *a)* à *d)*



2. *a)* à *d)*



3. *a)* $\vec{v} = (5, -1)$ *b)* $\vec{v} = (-3, 3)$

4. *a)* $\vec{v} = (-5, 1)$ *b)* $\vec{v} = (3, -3)$

5. *a)* $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BA}$ *b)* $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{ED}$

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$ *d)* $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF}$

6. *a)* $\overrightarrow{AB}$ *b)* $\vec{0}$ *c)* $\vec{0}$

7. 1) Faux. 2) Faux. 3) Vrai. 4) Faux.

page 147

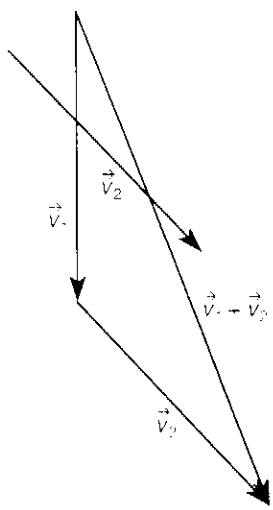
8. $C(10, 7)$

9. *a)* $\overrightarrow{DB}$ *b)* $\overrightarrow{BD}$ *c)* $\overrightarrow{AC}$

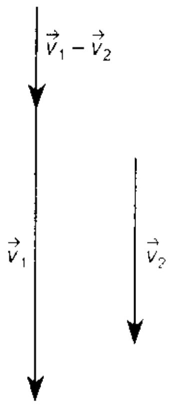
d) $\overrightarrow{AB}$ *e)* $\overrightarrow{CB}$ *f)* $\overrightarrow{AB}$

10. ① et ③

11. *a)*



b)



12. ***a)*** $D(-1, 4)$

b) $E(-3, -6)$

c) $F(7, 0)$

page 148

13. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}$

14. $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{HP} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HP}$ (Car $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GH}$)

$= \overrightarrow{GP}$ (Relation de Chasles)

15. ***a)*** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ ***b)*** $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{NP}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MN}$

16. ***a)*** $\overrightarrow{EF}$ ***b)*** $\overrightarrow{FG}$

17. ***a)*** ≈ 4,16 cm ***b)*** ≈ 2,76 cm

18. ***a)*** ≈ 102,1° ***b)*** ≈ 118,4°

page 149

19. ***a)*** ≈ 398,23 N ***b)*** ≈ 106,0°

20. (Autres réponses possibles.)
12,5 N et ≈ 21,65 N

21. ≈ 92,9°

22. ≈ 544,1 km/h

23. ≈ 1,41 km

page 150

24. ***a)*** ≈ 1,80 km ***b)*** E. 1,1° S.

25. 15 N

Forum

a) A), car dans un triangle, la mesure d'un côté est plus petite que la somme des mesures des deux autres côtés.

b) 1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.
2) $\vec{u} = -\vec{v}$

c) 1) Oui, car $\|\vec{u}\|$ est un nombre réel (positif).
Si $\|\vec{u}\| \in \mathbb{R}$ et $3 \in \mathbb{R}$, alors $\|\vec{u}\| + 3 \in \mathbb{R}$.
2) Non, car $\|\vec{u}\|$ est un nombre réel et $(3, -2)$ est un couple.

d) 1) $B = C$ 2) $A = C$ 3) $\overrightarrow{BD}$

page 151

L'aviron

a) (Représentation personnelle.)
1^{re} embarcation : 1000 N
2^e embarcation : 2000 N
3^e embarcation : 4000 N

b) 1) $2\vec{v}$ 2) $4\vec{v}$ 3) $8\vec{v}$

c) 1) 1000 N 2) 2000 N 3) 4000 N

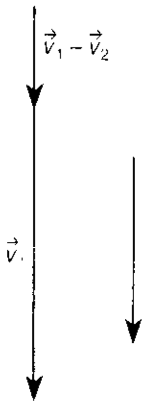
d) 900 N

e) 1) 1250 N dans le sens des bateaux.
2) $500\sqrt{2}$ N ou ≈ 707,11 N dans le sens des bateaux.
3) 400 N dans le sens des bateaux.
4) 1750 N dans le sens des bateaux.
5) 0 N

f) La direction demeure inchangée.

g) Le sens demeure inchangé si on multiplie par un scalaire positif. Il change si le scalaire est négatif. Si c'est 0, le vecteur devient le vecteur nul et il a tous les sens.

b)



12. ***a)*** $D(-1, 4)$

b) $E(-3, -6)$

c) $F(7, 0)$

page 148

13. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$
$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}$

14. $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{HP} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HP}$ (Car $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{GH}$)
$= \overrightarrow{GP}$ (Relation de Chasles)

15. ***a)*** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{NP}$
$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MN}$

16. ***a)*** $\overrightarrow{EF}$ ***b)*** $\overrightarrow{FG}$

17. ***a)*** ≈ 4,16 cm ***b)*** ≈ 2,76 cm

18. ***a)*** ≈ 102,1° ***b)*** ≈ 118,4°

page 149

19. ***a)*** ≈ 398,23 N ***b)*** ≈ 106,0°

20. (Autres réponses possibles.)
12,5 N et ≈ 21,65 N

21. ≈ 92,9°

22. ≈ 544,1 km/h

23. ≈ 1,41 km

page 150

24. ***a)*** ≈ 1,80 km ***b)*** E. 1,1° S.

25. 15 N

Forum

a) A), car dans un triangle, la mesure d'un côté est plus petite que la somme des mesures des deux autres côtés.

b) 1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.
2) $\vec{u} = -\vec{v}$

c) 1) Oui, car $\|\vec{u}\|$ est un nombre réel (positif).
Si $\|\vec{u}\| \in$ IR et $3 \in$ IR, alors $\|\vec{u}\| + 3 \in$ IR.
2) Non, car $\|\vec{u}\|$ est un nombre réel et $(3, -2)$ est un couple.

d) 1) $B = C$ 2) $A = C$ 3) $\overrightarrow{BD}$

page 151

L'aviron

a) (Représentation personnelle.)
1re embarcation : 1000 N
2^{e} embarcation : 2000 N
3^{e} embarcation : 4000 N

b) 1) $2\vec{v}$ 2) $4\vec{v}$ 3) $8\vec{v}$

c) 1) 1000 N 2) 2000 N 3) 4000 N

d) 900 N

e) 1) 1250 N dans le sens des bateaux.
2) $500\sqrt{2}$ N ou ≈ 707,11 N dans le sens des bateaux.
3) 400 N dans le sens des bateaux.
4) 1750 N dans le sens des bateaux.
5) 0 N

f) La direction demeure inchangée.

g) Le sens demeure inchangé si on multiplie par un scalaire positif. Il change si le scalaire est négatif. Si c'est 0, le vecteur devient le vecteur nul et il a tous les sens.

page 152

h) $k\vec{u} = (ka, kb)$, où $\vec{u} = (a, b)$

1) $4\vec{u} = 4(2, -1) = (8, -4)$

2) $3\vec{s} = 3(4, 2) = (12, 6)$

i) 1) $-4\vec{u} = (-8, 4)$

2) $-3\vec{s} = (-12, -6)$

j) 1) Oui. 2) Oui.

k) $k_2 = \frac{1}{k_1}$

l) 1) Non. 2) Oui. 3) Non.

m) 1) $k = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}$ 2) $k = -\frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{v}\|}$

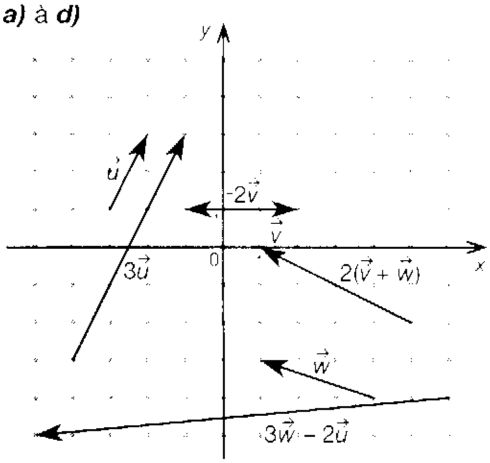
page 153

n) La multiplication d'un vecteur par un scalaire donne toujours un vecteur de même direction.

Investissement 4

1. (Autres réponses possibles.)

a) à ***d)***



2. ***a)*** (-4, -8)

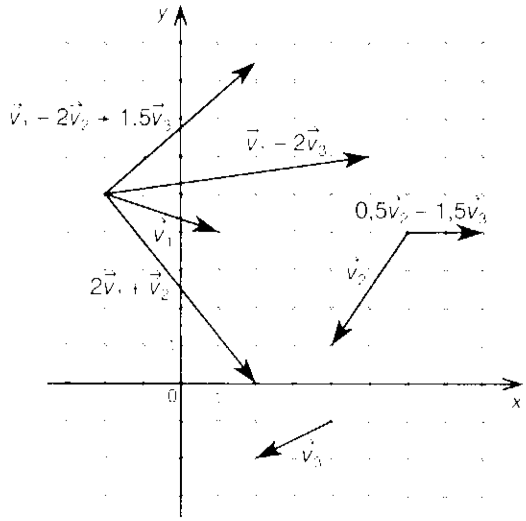
b) (-7, 3)

c) (14, -4)

d) (-11, -1)

page 154

3. ***a)*** à ***d)***



4. ***a)*** $\vec{v} = -\frac{2}{3}\vec{u}$ ou $\vec{u} = -\frac{3}{2}\vec{v}$

b) $\vec{v} = \frac{5}{8}\vec{u}$ ou $\vec{u} = \frac{8}{5}\vec{v}$

5. À la condition qu'ils soient colinéaires.

6. ***a)*** $\vec{w} = 2{,}75\,\vec{m}$ ***b)*** $\vec{w} = -0{,}5\,\vec{m}$

7. $k = \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$

page 155

8. $\|\vec{s}\| = 1{,}3\,\|\vec{p}\|$

9. ***a)*** $5\vec{v}$ ***b)*** $\vec{0}$ ***c)*** $\vec{v}$ ***d)*** $3\vec{v}$

10. $a\|\vec{v}\|$ est un nombre réel et $a\vec{v}$ est un vecteur.

11. ***a)*** $\approx$ 0,82 ***b)*** $\approx$ 2,08

c) -2 ***d)*** $\approx$ -1,93

e) $\approx$ 14,42 ***f)*** -1

12. ***a)*** $\approx$ 29,09 N et $\approx$ 67,66 N

b) Non.

c) Non, car les résultantes ne sont pas colinéaires.

d) Oui.

Forum

a) Soit $k = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

b) C'est vrai, car on considère la direction et la norme du nouveau vecteur est proportionnelle à la norme du premier.

c) 1° Si $k = 1$ et $\vec{s} = \vec{v}$.

2° Si $k = \dfrac{\|\vec{s}\|}{\|\vec{v}\|}$ et $\vec{s}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

3° Si $\vec{s} = \vec{0}$ et $k = 0$.

d) Oui, car il existe un scalaire k tel que $\vec{v} = k\vec{w}$.

page 156

Une petite course au dépanneur

a) 7,00 $

b) $(2, 3) \times (1{,}70,\ 1{,}20) =$
$(2 \times 1{,}70) + (3 \times 1{,}20) = 7{,}00$ $

Observation 1

c) 1) $\vec{u} \bullet \vec{v} = (2, 4) \times (2, -1) = 4 + (-4) = 0$
2) $\vec{a} \bullet \vec{b} = (-3, -2) \times (4, -6) = -12 + 12 = 0$

page 157

3) $\vec{r} \bullet \vec{s} = (-1, 6) \times (-6, -1) = 6 + (-6) = 0$

4) $\vec{m} \bullet \vec{n} = (-6, 3) \times (1{,}5,\ 3) = -9 + 9 = 0$

Observation 2

d) 13

e) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}61$
$\|\vec{v}\| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26} \approx 5{,}10$

f) $\sqrt{13} \cos 45° \approx 2{,}55$

g) $\sqrt{13} \cos 45° \times \sqrt{26} = 13$

h) Ils sont égaux.

page 158

i) $\|\vec{u}\| \cos \theta$

j) $\sqrt{10} \bullet \sqrt{13} \cos 52{,}1° = \sqrt{130} \cos 52{,}1°$
≈ 7

k) 1) $\vec{u} = (-5, 1)$ et $\vec{v} = (2, 3)$
$\vec{u} \bullet \vec{v} = -10 + 3 = -7$

2) $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos \theta$
$= \sqrt{26} \bullet \sqrt{13} \cos 112{,}4° \approx -7$

page 159

l) 1) La force exercée n'est pas dans la même direction que celle du déplacement.

2) $\approx$ 1732,05 N

3) 866 025,4 J

Investissement 5

1. ***a)*** 23 ***b)*** 0 ***c)*** 0 ***d)*** $\frac{2}{3}$

2. ***a)*** 8,36 ***b)*** -18

page 160

c) $\approx 22{,}98$ ***d)*** $\approx -3{,}13$

3. Si $\vec{u} = (a, b)$, alors $\vec{u} \bullet \vec{u} = a^2 + b^2 = \|\vec{u}\|^2$
(ou $\|\vec{u}\|\|\vec{u}\| \cos 0° = a^2 + b^2$)

4. ***a)*** $\approx 34{,}64$ ***b)*** -24

c) -12 ***d)*** $2\sqrt{2} - 1 \approx 1{,}83$

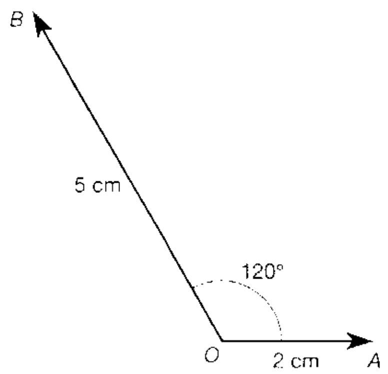
5. ***a)*** $\vec{v}$ et $\vec{n}$; $\vec{w}$ et $\vec{n}$ ***b)*** $\vec{v}$ et $\vec{w}$

6. ***a)*** $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BC} = (9, -9) \bullet (7, 7) = 63 - 63 = 0$
Ils sont perpendiculaires.

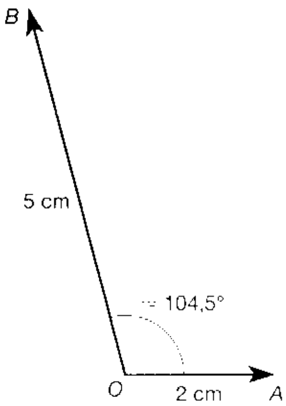
b) Le bateau situé en A.

7. (Autres réponses possibles.)

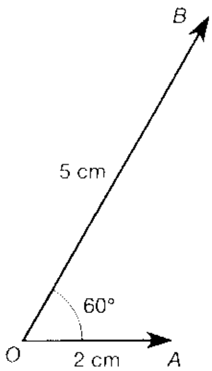
a)



b)



c)



page 161

8. ***a)*** 9 ***b)*** 16 ***c)*** 0

9. (Autres réponses possibles.)

a) (-2, 2) et (2, -2)

b) (-30, -25) et (30, 25)

c) (-*b*, *a*) et (*b*, -*a*)

10. -12,5

11. ≈ 108,4°

12. 125 000 J

Forum

a) Parce que $\|\vec{s}\|$ et $\|\vec{p}\| \in \mathbb{R}_+$: ce sont des nombres réels positifs. C'est un produit de scalaires.

b) Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos 90°$
$= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot 0$
$= 0$

c) C'est vrai : soit $\vec{v} = (a, b)$, $\vec{u} = (c, d)$ et $k \in \mathbb{R}$.

Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd = k$, alors $c = \frac{k - bd}{a}$.

d) A), car $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \left|\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos\theta\right|$, où $-1 < \cos\theta < 1$.
Donc, $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$.

e) La norme de ce vecteur est 1 : c'est le vecteur unitaire.
Si $\vec{u}$ = (a, b),

$$\text{alors } \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\text{et } \left\|\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right\| = \sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}}$$

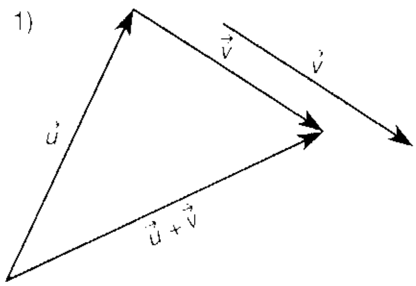
$$= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}}$$

$$= 1$$

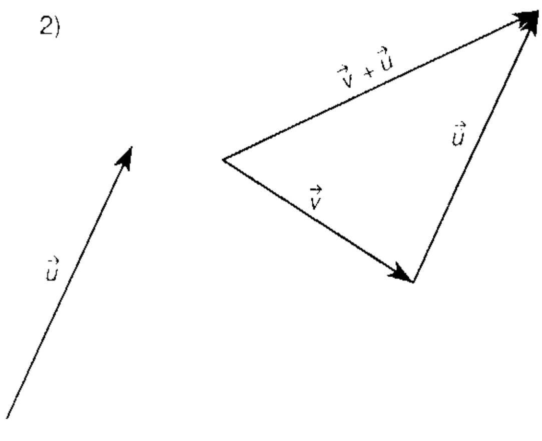
page 162

Des propriétés connues!

a) 1)



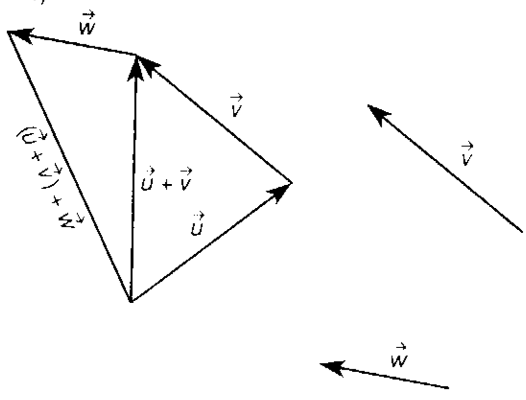
2)



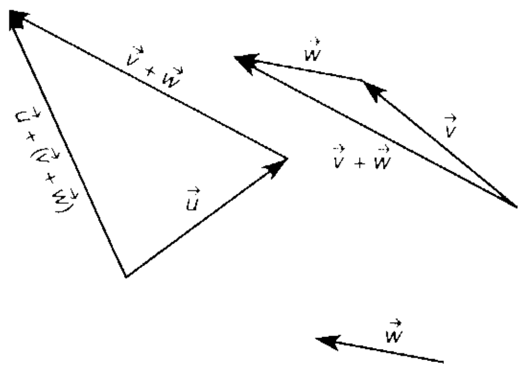
b) 1) (2, 3) + (4, -5) = (2 + 4, 3 + -5) = (6, -2)
2) (4, -5) + (2, 3) = (4 + 2, -5 + 3) = (6, -2)

page 163

c) 1)



2)



d) 1) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = ((2, ^-3) + (1, 2)) + (3, ^-1)$
$= (3, ^-1) + (3, ^-1)$
$= (6, ^-2)$

2) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (2, ^-3) + ((1, 2) + (3, ^-1))$
$= (2, ^-3) + (4, 1)$
$= (6, ^-2)$

e) $\vec{0} = (0, 0)$
Soit $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{0} = (0, 0)$
$\vec{u} + \vec{0} = (a, b) + (0, 0)$
$= (a + 0, b + 0)$
$= (a, b)$
$= \vec{u}$

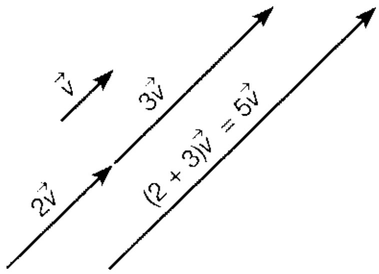
f) Soit $-\vec{v} = (^-a, ^-b)$
$\vec{v} + (-\vec{v}) = (a, b) + (^-a, ^-b)$
$= (a - a, b - b)$
$= (0, 0)$
$= \vec{0}$

page 164

a) 1) $3((2, ^-3) + (4, 5)) = 3(2, ^-3) + 3(4, 5)$
$3(6, 2) = (6, ^-9) + (12, 15)$
$(18, 6) = (18, 6)$

2) $k((a, b) + (c, d)) = k(a, b) + k(c, d)$
$k(a + c, b + d) = (ka, kb) + (kc, kd)$
$(k(a + c), k(b + d)) = (ka + kc, kb + kd)$
$(ka + kc, kb + kd) = (ka + kc, kb + kd)$

b)



c) Oui, par exemple, en *a)*, on aurait :
1) $3((2, ^-3) - (4, 5)) = 3(2, ^-3) - 3(4, 5)$
$3(^-2, ^-8) = (6, ^-9) - (12, 15)$
$(^-6, ^-24) = (^-6, ^-24)$

2) $k((a, b) - (c, d)) = k(a, b) - k(c, d)$
$k(a - c, b - d) = (ka, kb) - (kc, kd)$
$(ka - kc, kb - kd) = (ka - kc, kb - kd)$

page 165

a) $3 \times 5 \cos 30° = 5 \times 3 \cos 30°$
$= 15 \cos 30°$
$= \frac{15\sqrt{3}}{2} \approx 12{,}99$

b) $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$

$(a, b) \bullet ((c, d) + (e, f)) = (a, b) \bullet (c, d) + (a, b) \bullet (e, f)$

$(a, b) \bullet (c + e, d + f) = ac + bd + ae + bf$

$a(c + e) + b(d + f) = ac + bd + ae + bf$

$ac + ae + bd + bf = ac + ae + bd + bf$ (Commutativité de l'addition dans IR)

c) $k_1\vec{u} \bullet k_2 v = k_1k_2(\vec{u} \bullet \vec{v})$

$k_1(a, b) \bullet k_2(c, d) = k_1k_2(\vec{u} \bullet \vec{v})$

$(k_1a, k_1b) \bullet (k_2c, k_2d) = k_1k_2(\vec{u} \bullet \vec{v})$

$k_1ak_2c + k_1bk_2d = k_1k_2(\vec{u} \bullet \vec{v})$ (Définition de la multiplication scalaire)

$k_1k_2ac + k_1k_2bd = k_1k_2(\vec{u} \bullet \vec{v})$ (Commutativité de la multiplication dans IR)

$k_1k_2(ac + bd) = k_1k_2(\vec{u} \bullet \vec{v})$ (Distributivité de la multiplication sur l'addition)

$k_1k_2(\vec{u} \bullet \vec{v}) = k_1k_2(\vec{u} \bullet \vec{v})$ (Définition du produit scalaire)

page 166

Investissement 6

1. **a)** $7\vec{u}$ **b)** $-6\vec{u}$ **c)** $8\vec{u} \bullet \vec{v}$
   d) $-\vec{u} \bullet -\vec{u} = \|-\vec{u}\|^2$

2. **a)** $-\vec{u}$ **b)** $\vec{u} - \vec{v}$
   c) $-\vec{u} - 12\vec{v} + 11\vec{w}$ **d)** $3\vec{u} - 2\vec{v}$

page 167

3. **a)** (-30, 45) **b)** (156, -234)
   c) (2, -3) **d)** (43, 7)

4. **a)** $\frac{17}{12}\vec{a}$ **b)** $\frac{17}{20}\vec{a}$ **c)** $\frac{4}{15}\vec{a}$
   d) $\frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{2}$ **e)** $4\vec{a} \bullet \vec{b}$ **f)** 0

5. Soit $\vec{u} = (a, b)$
   On a $\vec{u} \bullet \vec{u} = (a, b) \bullet (a, b)$
   $= a^2 + b^2$
   $= \|\vec{u}\|^2$

6. $\|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2$

7. **a)** $4\|\vec{a}\|^2 - 9\|\vec{b}\|^2$
   $32 - 117 = -85$
   b) $6\|(\vec{a} + \vec{b})\|^2 = 6\|(-5, 0)\|^2$
   $= 6 \times 25$
   $= 150$

8. $\vec{n} \bullet \vec{m} = \vec{m} \bullet \vec{n}$
   $(r, s) \bullet (p, q) = \vec{m} \bullet \vec{n}$
   $rp + sq = \vec{m} \bullet \vec{n}$ (Définition de la multiplication scalaire)
   $pr + qs = \vec{m} \bullet \vec{n}$ (Commutativité de la multiplication)
   $(p, q) \bullet (r, s) = \vec{m} \bullet \vec{n}$ (Définition de la multiplication scalaire)
   $\vec{m} \bullet \vec{n} = \vec{m} \bullet \vec{n}$ (Par hypothèse)

9. $a\vec{n} \bullet b\vec{m} = (ab)(\vec{n} \bullet \vec{m})$
   $a(r, s) \bullet b(p, q) = (ab)(\vec{n} \bullet \vec{m})$
   $(ar, as) \bullet (bp, bq) = (ab)(\vec{n} \bullet \vec{m})$
   $arbp + asbq = (ab)(\vec{n} \bullet \vec{m})$ (Définition de la multiplication scalaire)
   $abrp + absq = (ab)(\vec{n} \bullet \vec{m})$ (Commutativité de la multiplication)
   $ab(rp + sq) = (ab)(\vec{n} \bullet \vec{m})$ (Distributivité de la multiplication sur l'addition)

10. $\vec{u} \bullet \vec{m} + \vec{u} \bullet \vec{n} = \vec{u} \bullet (\vec{m} + \vec{n}) = (a, b) \bullet (r, s) = ar + bs$

11. ***a)*** $-4\vec{a} + 11\vec{b}$ ***b)*** $\vec{a} - 7\vec{b}$

c) $-2\vec{a} + 14\vec{b}$

d) $12\|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a} \bullet \vec{b} - 24\|\vec{b}\|^2$

Forum

a) Soit $\vec{0} = (0, 0)$ et $k \in$ IR.

$k \bullet \vec{0} = k(0, 0)$
$= (k \bullet 0, k \bullet 0)$
$= (0, 0)$
$= \vec{0}$

b) Soit $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (c, d)$ et $k \in$ IR.

$\vec{u} \bullet (k\vec{v}) = (a, b) \bullet (kc, kd)$
$= akc + bkd$
$= kac + kbd$
$= (ka, kb) \bullet (c, d)$
$= (k\vec{u}) \bullet \vec{v}$

c) Non.

Soit $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{0} = (0, 0)$.

$\vec{0} \bullet \vec{u} = (0, 0) \bullet (a, b)$
$= 0a + 0b$
$= 0 \ (0 \neq \vec{0})$

page 168

Un problème de navigation

a) Non.

b) Non.

c) Elle doit être augmentée et changer de direction.

d) Elle doit être diminuée et changer de direction.

e) Une infinité.

f) $\vec{v} = 2\vec{r}$

g) Oui.

h) Oui, une infinité.

i) $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

j) $\vec{w} = 3\vec{s} + 2\vec{r}$

page 169

Investissement 7

1. ***a)*** $\vec{s} = \vec{m} + \vec{n}$ ***b)*** $\vec{w} = 2{,}06\vec{x} + \vec{y}$

c) $\vec{s} = 2\vec{m} + 2\vec{n}$ ***d)*** $\vec{r} = 1{,}864\vec{d} + 3{,}8\vec{e}$

2. ***a)*** $a = 2$ ***b)*** $b = 2$

c) $a = -1$ ***d)*** $a = -2$ et $b = -1$

e) $a = 2$ et $b = -3$ ***f)*** $a = \frac{1}{2}$ et $b = 2$

page 170

3. ***a)*** $\vec{v} = 4\vec{n} + \vec{m}$ ***b)*** $\vec{s} = 2\vec{r} + 1{,}5\vec{t}$

c) $\vec{r} = \vec{p} + 2\vec{g}$ ***d)*** $\vec{r} = \frac{5}{3}\vec{p} + 2\vec{q}$

e) $\vec{r} = -2\vec{p} + \vec{g}$ ***f)*** $\vec{r} = -\frac{5}{3}\vec{p} + 2\vec{q}$

page 171

4. ***a)*** $1{,}5\vec{u} + \vec{v}$ ***b)*** $1{,}5\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v}$

c) $1{,}5\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v}$ ***d)*** $2\vec{u} - \frac{5}{3}\vec{v}$

e) $-\frac{4}{3}\vec{v}$ ***f)*** $-1{,}5\vec{u} - \vec{v}$

5. ***a)*** $10\sqrt{5} \approx 22{,}36$ ***b)*** $\approx 83{,}3° \approx 263{,}3°$

6. ***a)*** $\vec{v} = 0{,}4\vec{s} + 0{,}9\vec{r}$ ***b)*** $\vec{v} = -\frac{17}{4}\vec{e} - \frac{11}{4}\vec{d}$

7. (Autres réponses possibles.)

a) $\approx 2\vec{u} + 3\vec{v}$ ***b)*** $\approx \vec{u} - 2{,}5\vec{v}$

c) $\approx -1{,}5\vec{u} - 3\vec{v}$ ***d)*** $\approx -1{,}5\vec{u}$

page 172

8. ***a)*** $\approx 4{,}29$ ***b)*** $6\sqrt{2} \approx 8{,}49$

9. $b = 2a$, où a et $b \in$ IR

10. $\approx 104{,}04°$

11. Oui.

$\vec{u} = (3, -6)$

$\vec{v} = (4, 2)$

$\vec{u} \bullet \vec{v} = (3, -6) \bullet (4, 2)$

$= 12 - 12$

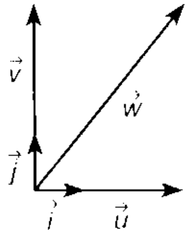
$= 0$

12. Oui, si les vecteurs sont différents.

(Autres réponses possibles.)

$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

$\vec{w} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$



13. $a = 0$ et $b = 4x$ ou $b = 4y$, car $x = y$ et

$(a, b) = (2x - 2y, x + 3y)$

$2x - 2y = a \Rightarrow a = 0$, car $x = y$

$x + 3b = b \Rightarrow 4x = b$ ou $4y = b$, car $x = y$

Forum

a) Oui. Tout vecteur est décomposable en une somme de deux autres vecteurs qui, eux-mêmes, peuvent être décomposés en un produit d'un vecteur par un scalaire. Les coefficients de la combinaison linéaire qui permet de définir un vecteur à l'aide de deux vecteurs prédéfinis sont uniques.

b) Oui, car $\vec{v} \bullet \vec{v}$ et $\vec{u} \bullet \vec{v} \in$ IR.

c) Oui, car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

d) Le coefficient b ($b = 0$).

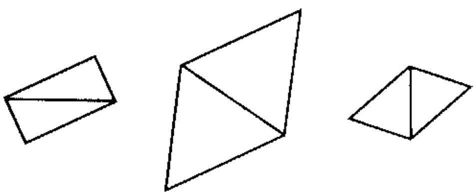
e) $a = 3$, $b = -1$ et $c = 2$

page 173

À propos des parallélogrammes

a) Oui.

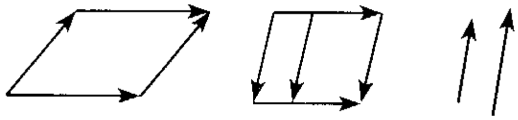
(Autres réponses possibles.)



b) Tout vecteur peut être exprimé sous la forme d'une infinité de combinaisons linéaires.

c) Non.

1) 2) 3)



d) Ils doivent être non linéaires.

e) 1) Non, car les vecteurs u et v sont colinéaires.

2) Non, car les vecteurs u et v sont colinéaires.

page 174

f) $\vec{p} = -\vec{i} + 2\vec{j}$

$\vec{q} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$

$\vec{r} = -3\vec{i} - \vec{j}$

$\vec{s} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$

$\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$

$\vec{v} = -5\vec{i} + 2\vec{j}$

$\vec{w} = -\vec{i} - 3\vec{j}$

g) Ce sont les composantes de chaque vecteur.

page 175

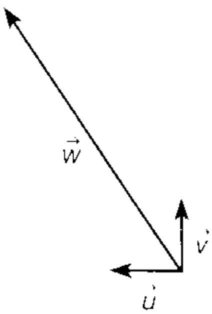
Investissement 8

1. ***a)*** $3\vec{a} + 4\vec{b}$ ***b)*** $-\frac{3}{2}\vec{c} + 4\vec{b}$

c) $3\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{d}$ ***d)*** $-\frac{3}{2}\vec{c} - \frac{4}{3}\vec{d}$

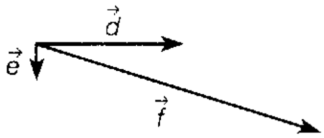
2. (Autres réponses possibles.)

a)



$\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$

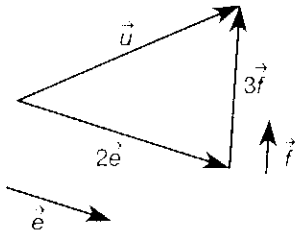
b)



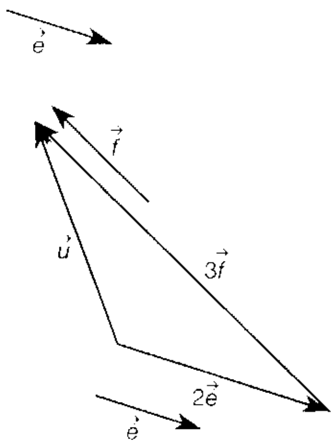
$\vec{f} = 2\vec{d} + 3\vec{e}$

page 176

3. ***a)***



b)



4. $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$

5. ***a)*** $2{,}5\vec{a} + \vec{b}$ ***b)*** $-2\vec{a} + 4\vec{b}$

c) $-5\vec{a} - 1{,}5\vec{b}$ ***d)*** $4\vec{a} + 3{,}5\vec{b}$

page 177

6. ***a)*** $a = 6$ et $b = 2{,}5$

b) $a = -\sqrt{2}$ et $b = \dfrac{3\sqrt{2} - 5}{2}$

7. ***a)*** $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$

b) $\overrightarrow{CD} = (\sqrt{3} + 2)\vec{i} + (-4 - \sqrt{2})\vec{j}$

c) $\overrightarrow{EF} = 2\vec{i} - 6\vec{j}$ ***d)*** $\overrightarrow{GH} = 10\vec{j}$

8. ***a)*** $\vec{w} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ ***b)*** $\vec{w} = -8\vec{i} + 9\vec{j}$

c) $\vec{w} = (12 + 2\sqrt{2})\vec{i} - (9 + 3\sqrt{2})\vec{j}$

9. ***a)*** $\vec{w} = -0{,}6\vec{u} + 0{,}8\vec{v}$ ***b)*** $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$

c) $\vec{w} = -2{,}4\vec{u} + 1{,}2\vec{v}$

10. ***a)*** $\sqrt{2}$ ***b)*** $\sqrt{2}$ ***c)*** $2\sqrt{2}$ ***d)*** 0

11. $a = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$
$= a_1(1, 0) + b_1(0, 1)$
$= (a_1, 0) + (0, b_1)$
$= (a_1, b_1)$

12. ***a)*** Oui. ***b)*** Non. ***c)*** Non. ***d)*** Oui.

Forum

a) Non. C'est seulement dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants que $a = b = 0$.

b) 1) $\vec{w} = 3\vec{e} + 2\vec{f} + 3\vec{g}$
2) $\vec{w} = 3\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}$

page 179

Les vecteurs, une théorie

a) **Théorème des vecteurs colinéaires**
(Travail personnel.)

page 183

Feuille de travail 5

b) **Théorème du produit scalaire**

<u>Preuve</u>
2° $\vec{u} - \vec{v}$
3° (a, b)
4° $(a - c, b - d)$
5° $(b - d)^2$
6° $a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2$
7° $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2(ac + bd)$
8° $2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$
10° $ac + bd = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$
11° $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$

page 184

c) Théorème du produit scalaire nul

Partie 1 : ($\rightarrow$)

Pose du problème

Hypothèse : $\vec{u}$; $\vec{v}$; orthogonaux.

Conclusion : 0

Preuve

1° 0

Partie 2 : ($\leftarrow$)

Pose du problème

Conclusion : $\vec{u} \perp \vec{v}$

Preuve

1° 0

page 185

Les vecteurs caméléons

a) Théorème des quatre points

Preuve

1° $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AD}$

2° $\overrightarrow{BC}$

3° $\vec{0}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BC}$

page 186

b) Théorème du parallélogramme

Idée générale d'une preuve

équipollentes

Preuve

1° vecteur

2° $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{DC}$

3° $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{DC}$

4° $\overrightarrow{AD}$

c) Théorème de la médiane

Preuve

1° $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$
(par la relation de Chasles)

2° $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$
(par la relation de Chasles)

3° $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$
(par addition des équations de 1° et 2°)

4° $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$
(par commutativité de l'addition vectorielle)

5° $\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{CM}$
(car M est le point milieu de $\overline{BC}$)

6° $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + (-\overrightarrow{CM}) + \overrightarrow{CM}$
(par substitution de $\overrightarrow{BM}$ par $-\overrightarrow{CM}$ en 4°)

7° $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 0$
(par addition de vecteurs opposés)

8° $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ (par multiplication par $\frac{1}{2}$)

page 187

d) Théorème des points milieux des côtés d'un triangle

Pose du problème

Hypothèse : $\overrightarrow{NC}$

Preuve

1° $\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{NC}$

2° $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

3° $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

4° $\overrightarrow{BC}$

5° $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{MN}$

6° $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MN}$

page 188

e) Théorème des diagonales du parallélogramme

1) Preuve

1° $\overrightarrow{DE}$

2° $\overrightarrow{DE}$; $\overrightarrow{EC}$

3° $\overrightarrow{DE}$

2) Preuve

2° $\overrightarrow{AD}$

3° $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

4° parallélogramme

page 189

f) Théorème des points milieux des côtés d'un quadrilatère

Pose du problème

Hypothèse : P est le milieu de $\overline{AB}$.
Q est le milieu de $\overline{BC}$.
R est le milieu de $\overline{AD}$.
S est le milieu de $\overline{DC}$.

Conclusion : $PQSR$ est un parallélogramme.

Preuve

1° Relions les points A et C (pour former les triangles ABC et ADC).

2° $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AC}$ et $\|\overrightarrow{PQ}\| = \dfrac{\|\overrightarrow{AC}\|}{2}$
(par le théorème des points milieux d'un triangle)

3° $\overrightarrow{RS} \parallel \overrightarrow{AC}$ et $\|\overrightarrow{RS}\| = \dfrac{\|\overrightarrow{AC}\|}{2}$
(par le théorème des points milieux d'un triangle)

4° Par transitivité, $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{RS}$ et $\|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{RS}\|$.

5° $PQSR$ est un parallélogramme par le théorème du parallélogramme.
On aurait pu faire cette preuve en utilisant la diagonale BD.

g) Théorème de l'angle inscrit dans un demi-cercle

Pose du problème

Hypothèse : $\overline{AC}$ est un diamètre.

Conclusion : $\angle ABC$ est droit.

Preuve

Relions les points A et C (pour former les triangles ABC et ADC).

$\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO}^2 + \overrightarrow{BO} \bullet \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OC}$
(par distributivité)

$= \|\overrightarrow{BO}\|^2 + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) \bullet \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{AO} \bullet \overrightarrow{OC}$
(carré scalaire; distributivité)

$= \|\overrightarrow{BO}\|^2 + \vec{0} \bullet \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{AO} \bullet \overrightarrow{AO}$
(vecteurs opposés)

$= \|\overrightarrow{BO}\|^2 + \vec{0} - \|\overrightarrow{AO}\|^2$
(carré scalaire)

$= r^2 + 0 - r^2$
(comme rayons d'un même cercle)

$= 0$

page 190

h) Théorème de la diagonale trisectée dans un parallélogramme

Pose du problème

Hypothèse : $ABCD$ est un parallélogramme.
P est le milieu de $\overline{BC}$.
Q est le milieu de $\overline{CD}$.

Conclusion : Les points E et F sont situés au tiers et aux deux tiers de la diagonale BD.

Idée générale d'une preuve

Il suffit de construire un système d'équations à deux variables (k_1 et k_2) à partir des propriétés des vecteurs colinéaires ($\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AP}$; $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{DB}$). Par la suite, en résolvant le système, on démontre que les points E et F sont situés respectivement au tiers et aux deux tiers de $\overline{BD}$.

Preuve

1° $\overline{BC}$; un parallélogramme

2° Chasles

3° colinéaires; colinéaires

6° par commutativité; par définition des vecteurs opposés; par distributivité

8° $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$

9° $\frac{1}{3}$; tiers

page 191

Investissement 9

1. ***a)*** $\vec{v}$ est l'opposé de $\vec{w}$.

   b) $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.

   c) $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{z}$.

   d) $a = 0$ ou $\vec{s} = \vec{0}$

   e) $\vec{s}$ est colinéaire à $\vec{v}$.

   f) $2\vec{a} = -\vec{c}$. Ils sont colinéaires.

   g) $a\vec{s} = -b\vec{p}$. Ils sont colinéaires.

   h) Les vecteurs $\vec{v} = (a, b)$ et $\vec{w} = (c, d)$ sont orthogonaux.

2. ***a)*** Non, car $\nexists\, r \in \mathbb{R} : \vec{x} = r\vec{s}$.

   b) Oui, car u $= -\frac{1}{2}\vec{w}$.

   c) Non, car $\nexists\, r \in \mathbb{R} : \vec{v} = r\vec{t}$ (sauf si $a = 1$).

   d) Oui, car $\vec{p} = -\vec{q}$.

3. ***a)*** Oui, car $\vec{a} \bullet \vec{b} = (-2)(-2) + (4)(-1)$
   $= 4 - 4$
   $= 0$

   b) Oui, car $\vec{e} \bullet \vec{f} = \left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{5}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)(-2) = 0.$

   c) Oui, car si $b \neq 0$,
   $\vec{r} \bullet \vec{s} = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{ab}{3}\right) + (2a)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2a}{3} - \frac{2a}{3} = 0$

   d) Oui, car $\vec{v} \bullet \vec{u} = (a + b)(a - b) + (b + a)(b - a)$
   $= a^2 - b^2 + b^2 - a^2 = 0$

4. ***a)*** Vrai, car ils ont la même norme, la même direction et le même sens.

   b) Faux, car cet énoncé est vrai seulement si $k \geq 0$.

   c) Vrai, car dans les deux cas, on obtient le même vecteur.

   d) Faux, car les vecteurs peuvent être orthogonaux.

5. ***a)*** par la définition de vecteurs opposés
   par la relation de Chasles

   b) par la définition de vecteurs opposés
   par la commutativité dans l'addition vectorielle
   par la relation de Chasles
   par la relation de Chasles
   par la définition du vecteur nul

page 192

6. <u>Pose du problème</u>
   Hypothèse : $ABCD$ est un parallélogramme.
   Conclusion : $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$

   <u>Preuve</u>
   1° $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$
   (puisque $ABCD$ est un parallélogramme, on a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$)
   2° $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$
   (par la relation de Chasles)

7. Il suffit d'additionner de chaque côté de l'égalité l'opposé du vecteur b.

8. $\vec{u} \bullet \vec{v} = (3\vec{i} + 2\vec{j}) \bullet (-4\vec{j} + 6\vec{j})$
   (par substitution)
   $= -12\vec{i}^2 + 18\vec{i} \bullet \vec{j} - 8\vec{j} \bullet \vec{i} + 12\vec{j}^2$
   (par distributivité)
   $= -12\|\vec{i}\|^2 + 18(0) - 8(0) + 12\|\vec{j}\|^2$
   (puisque $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux)
   $= -12 + 12$
   (puisque la norme des vecteurs i et j est de 1)
   $= 0$
   (par addition de nombres opposés)
   Donc, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, car leur produit scalaire est nul.

9. $\vec{v} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$ (par définition)
   $= -2\,(2\vec{i} - 1{,}5\vec{j})$ (par distributivité)
   $= -2\vec{u}$ (par définition)
   Donc, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, car $\vec{v} = k\vec{u}$, où $k = -2$.

10. <u>Pose du problème</u>
    Hypothèse : ABC est un triangle.
    M est le milieu de $\overline{BC}$.
    Conclusion : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

    <u>Preuve</u>
    1° $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$
    (par la relation de Chasles)
    $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$
    (par la relation de Chasles)
    2° $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$
    (par addition des vecteurs définis en 1°)

3° $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BM}$
(par hypothèse $\overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{BM}$)

4° $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 0$
(par addition de vecteurs opposés)

5° $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ (par division par 2)

6° $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (par distributivité)

11. Pose du problème

Hypothèse : ABC est un triangle quelconque.
$\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CF}$ sont les vecteurs associés aux médianes.

Conclusion : $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$

Preuve

1° $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ (par la relation de Chasles)
2° $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FA}$ (par la relation de Chasles)
3° $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC}$ (par la relation de Chasles)
4° $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FB}$ (par la relation de Chasles)
5° $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$ (par la relation de Chasles)
6° $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EA}$ (par la relation de Chasles)
7° $\vec{0} = 2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF})$
(par addition des six équations)
8° $\vec{0} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$ (par division par 2)

page 193

12. Pose du problème

Hypothèse : $ABCD$ est un trapèze.
$BC \parallel AD$
M est le point milieu de $\overline{AB}$ et N est le point milieu de $\overline{CD}$.

Conclusion : $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$

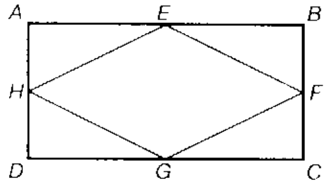
Preuve

1° $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$
(par la relation de Chasles)
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$
(par la relation de Chasles)
2° $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$ (par addition des deux équations)
3° $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN}$ (par commutativité de l'addition vectorielle)
4° $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} + \vec{0} + \vec{0}$
(par addition de vecteurs opposés)
5° $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$ (par division par 2)

13. Pose du problème

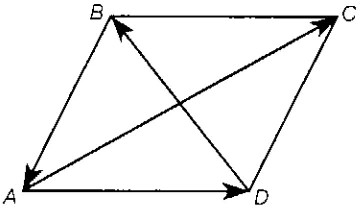
Hypothèse : Soit $ABCD$, un rectangle.
E est le point milieu de $\overline{AB}$.
F est le point milieu de $\overline{BC}$.
G est le point milieu de $\overline{CD}$.
H est le point milieu de $\overline{DA}$.

Conclusion : $EFGH$ est un losange.



Preuve

1° $EFGH$ est un parallélogramme
(par le théorème des points milieux des côtés d'u quadrilatère)
2° $\|\overrightarrow{FG}\|^2 = \|\overrightarrow{FC}\|^2 + \|\overrightarrow{CG}\|^2$
(par la relation de Pythagore)
$= \|\overrightarrow{BF}\|^2 + \|\overrightarrow{BE}\|^2$ (par hypothèse)
$= \|\overrightarrow{EF}\|^2$
(par la relation de Pythagore)
3° $\|\overrightarrow{FG}\| = \|\overrightarrow{EF}\|$
(car leurs carrés sont égaux)
4° Donc, $EFGH$ est un losange, car $EFGH$ est un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs co



14. Pose du problème

Hypothèse : *ABCD* est un parallélogramme.

Conclusion : $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$

Preuve

$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}$ (par définition de vecteurs opposés)

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$ (par la relation de Chasles)

$= \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ (par commutativité et par définition de vecteurs opposés)

$= \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}$ (par hypothèse)

$= \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$

15. Pose du problème

Hypothèse : Le Δ *ABC* est quelconque.

P est le point milieu de $\overline{AC}$.

Q est le point milieu de $\overline{AB}$.

R est le point milieu de $\overline{CB}$.

O est un point quelconque.

Conclusion : $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

Preuve

1° $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$ (par la relation de Chasles)

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BQ}$ (par la relation de Chasles)

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CR}$ (par la relation de Chasles)

2° $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ (par hypothèse)

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ (par hypothèse)

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ (par hypothèse)

3° $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ (par addition des trois équations)

4° $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA})$ (par distributivité)

5° $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\vec{0}$ (par la relation de Chasles)

6° $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (par la définition de vecteur nul)

16. Pose du problème

Hypothèse : Le Δ *ABC* est quelconque.

F est le point milieu de $\overline{AB}$.

E est le point milieu de $\overline{AC}$.

D est le point milieu de $\overline{BC}$.

Conclusion : $\overline{AO} = \frac{2}{3}\overline{AD}$

$\overline{BO} = \frac{2}{3}\overline{BE}$

$\overline{CO} = \frac{2}{3}\overline{CF}$

Preuve

1° Choisissons un point *O* sur $\overline{AD}$ de telle sorte que $\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{OD}$.

2° $\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD}$ (par la relation de Chasles)

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ (par hypothèse)

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})$ (par distributivité)

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (par la relation de Chasles)

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB})$ (par la relation de Chasles)

$= \frac{1}{2}(2\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB})$ (par construction)

$= \overrightarrow{OD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ (par distributivité)

3° $\overrightarrow{EO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ (par réduction)

4° Donc, $\overrightarrow{BO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$, car *O* est aux deux tiers de $\overline{BE}$.

On démontrerait de même que $\overrightarrow{CO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CF}$.

page 194

17. Pose du problème

Hypothèse : Soit ABC un triangle quelconque.

$m \angle C = \theta$

Soit $\|\overrightarrow{BC}\| = a$, $\|\overrightarrow{AC}\| = b$, $\|\overrightarrow{AB}\| = c$

Conclusion : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$

Preuve

1° $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC})$ (par la relation de Chasles)

$= (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})$ (par définition de vecteur opposé)

2° $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}^2 - \overrightarrow{CB} \bullet \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}^2$ (par distributivité)

$= \|\overrightarrow{CB}\|^2 + \|\overrightarrow{CA}\|^2 - 2\|\overrightarrow{CB}\|\|\overrightarrow{CA}\| \cos \theta$ (par définition de produit scalaire et du carré scalaire)

$= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$

18. Pose du problème

Hypothèse : $ABCD$ est un lozange.

BD et AC sont des diagonales.

Soit c la mesure d'un côté.

Conclusion : $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

Preuve

1° $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (par la relation de Chasles)

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ (par la relation de Chasles)

2° $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \bullet (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$ (par substitution)

$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB})$ (par hypothèse $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$)

3° $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{AB}$ (par distributivité)

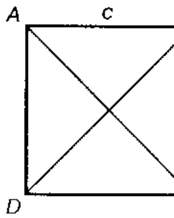
4° $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}^2 - \overrightarrow{AB}$ (par commutativité)

5° $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} = \|\overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2$ (par définition de produit scalaire)

6° $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} = c - c = 0$ (par hypothèse)

7° Donc, $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} = 0$ et $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$.

19. Pose du problème



Hypothèse : $ABCD$ est un carré.

$\overline{AC}$ et $\overline{BD}$ sont des diagonales.

Soit c la mesure d'un côté.

Conclusion : $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$

Preuve

1° $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \bullet (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})$ (par la relation de Chasles)

2° $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \bullet (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$ (par définition de vecteurs opposés)

3° $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}$ (par distributivité)

4° $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} = \|\overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2$ (par définition de produit scalaire)

6° $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} = c^2 - c^2 = 0$ (par hypothèse)

7° Donc, $\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{BD} = 0$ et $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$.

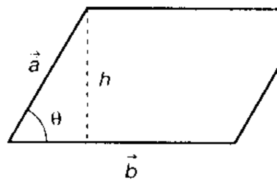
20. ***a)*** Orthogonaux. ***b)*** Colinéaires.

Forum

a) Aire = base × hauteur

$= \|\vec{b}\| \bullet \|\vec{a}\| \sin \theta$

$= \|\vec{a}\| \bullet \|\vec{b}\| \sin \theta$



b) $\vec{u} \bullet \vec{v} = (2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \bullet (3\vec{i} + 2\vec{j} - 8\vec{k})$

$= 6\vec{i}^2 + 4\vec{i} \bullet \vec{j} - 16\vec{i} \bullet \vec{j}\vec{k} + 3\vec{i} \bullet \vec{j} + 2\vec{j}^2 - 8\vec{j} \bullet \vec{k} + 3\vec{i} \bullet \vec{k} + 2\vec{j} \bullet \vec{k} - 8\vec{k}^2$

$= 6\vec{i}^2 + 0 - 0 + 0 + 2\vec{j}^2 - 0 + 0 + 0 - 8\vec{k}^2$ (car $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont perpendiculaires deux à deux)

$= 6\|\vec{i}\|^2 + 2\|\vec{j}\|^2 - 8\|\vec{k}\|^2$ (par définition de produit scalaire)

$= 6(1) + 2(1) - 8(1)$ (parce que les normes de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont 1)

$= 0$

Donc, $\vec{u} \perp \vec{v}$.

page 196

Maîtrise 9

B **1.** *a)* (1, 3) *b)* $\left(\frac{1}{16}, \frac{3}{16}\right)$
c) $\left(\frac{5}{4}, \frac{15}{4}\right)$ *d)* $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$
e) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

B **2.** *a)* 13 *b)* $\frac{9}{8}$ *c)* $\frac{9}{10}$ *d)* $-\frac{7}{2}$

B **3.** *a)* (0, -12) *b)* (-6, 12)
c) (3, 0) *d)* -18

B **4.** *a)* (-5, 2) *b)* (10, -8)
c) $(2(\sqrt{2} + \sqrt{3}), -2(\sqrt{2} + \sqrt{3}))$
d) $2\sqrt{2} + \sqrt{13}$ *e)* $2\sqrt{26}$
f) 1 *g)* $2\sqrt{2} - \sqrt{13}$
h) 8

B **5.** (Autres réponses possibles.)
a) 10 *b)* ≈ 22 *c)* ≈ 1,8 *d)* ≈ 8,3

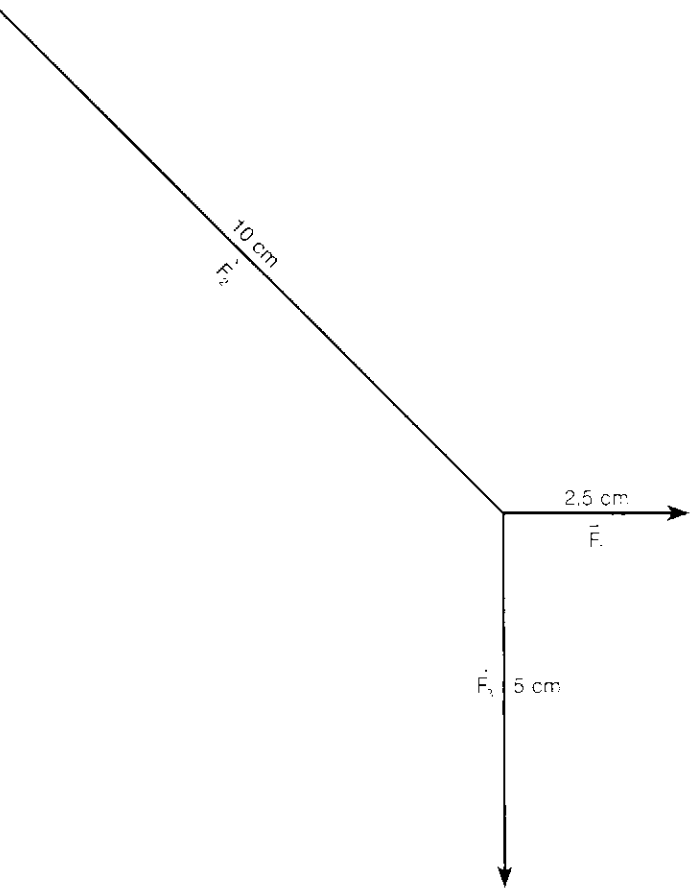
B **6.** (Autres réponses possibles.)
a) ≈ 30° *b)* ≈ 70° *c)* ≈ 70° *d)* ≈ 80°

B **7.** *a)* Ils sont opposés.
b) La table s'effondrerait.

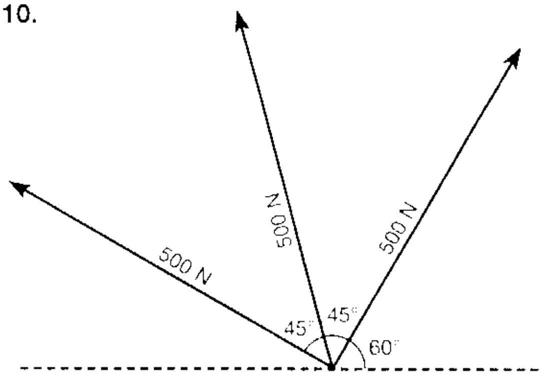
page 197

B **8.** (Autres réponses possibles.)
a) La direction. *b)* La norme.
c) La norme. *d)* Le sens.

B **9.**

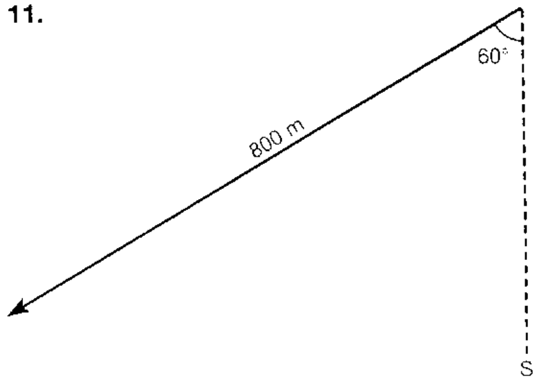


B **10.**

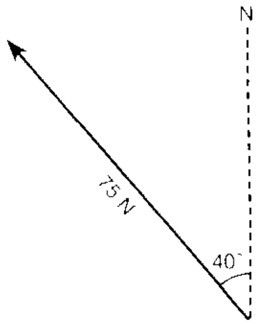


page 198

B **11.**



B **12.**



≈ 48,21 N : norme du vecteur horizontal.

≈ 57,45 N : norme du vecteur vertical.

B **13.** ***a)*** 5 ; ≈ 36,9° ***b)*** $2\sqrt{5}$; ≈ 153,4°

c) $2\sqrt{10}$; ≈ 198,4° ***d)*** $\sqrt{34}$; ≈ 301,0°

B **14.** $\left(\frac{2\sqrt{29}}{29}, \frac{5\sqrt{29}}{29}\right)$

B **15.** ***a)*** (-2, 8) ***b)*** (-4, -5)

c) (6, -4) ***d)*** (7, -6)

page 199

B **16.** ***a)*** Colinéaires, linéairement dépendants et même direction.

b) Même norme et linéairement indépendants.

B **17.** À l'addition de vecteurs.

B **18.** ***a)*** Son déplacement par rapport à son point de départ (le déplacement résultant).

b) $2\sqrt{13}$ km ≈ 7,21 km

B **19.** ***a)*** Son déplacement par rapport à son point de départ (le déplacement résultant).

b) $2\sqrt{19}$ km ≈ 8,72 km

page 200

B **20.** ***a)*** 54 km/h, direction N.-E.

b) 46 km/h, direction N.-E.

B **21.**

	Flèche		Vecteur		
	a) Origine	***b)*** Extrémité	***c)*** Composantes	***d)*** Norme	***e)*** Orientation
1)	(-2, 3)	(4, 5)	(6, 2)	$2\sqrt{10}$	≈ 18,4°
2)	(2, -2)	(6, 1)	(4, 3)	5	≈ 36,9°
3)	(0, -6)	(-2, -3)	(-2, 3)	$\sqrt{13}$	≈ 123,7°
4)	(2, 1)	(5, 3)	(3, 2)	$\sqrt{13}$	≈ 33,69°
5)	(0, 0)	(4, 2)	(4, 2)	$2\sqrt{5}$	≈ 26,56°
6)	(3, 0)	$(-3, 2\sqrt{3})$	$(-6, 2\sqrt{3})$	6,928	≈ 150°

B **22.** ***a)*** (1, -4) ***b)*** (1, -2) ***c)*** (0, -2)

d) (3, -3) ***e)*** (-3, 3)

page 201

B **23.** ≈ 117,53 cm

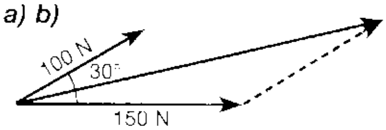
B **24.** ***a)*** Faux. ***b)*** Vrai. ***c)*** Vrai.

d) Vrai. ***e)*** Vrai.

B **25.** Les composantes de $\vec{v}$, ou bien, si $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$.

B **26.** Si $\vec{v} = -\vec{n}$.

B **27.** ***a) b)***



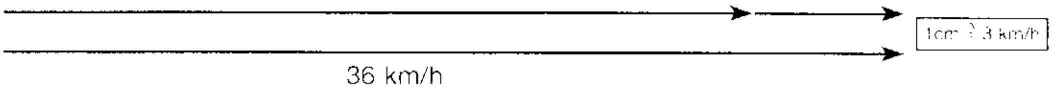
c) ≈ 241,83 N

V **28.** 28 avec une orientation d'environ 4,4°.

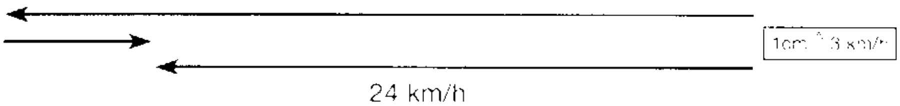
V **29.** ≈ 2,12 km

page 202

V **30.** ***a)***



b)



B **31.** ***a)*** ≈ 12,66 cm ***b)*** ≈ 7,20 cm

c) ≈ 34,6° et ≈ 93,3°

V **32.** Au cap, ≈ 12,2° (ou en direction N. ≈ 12,2° E.).

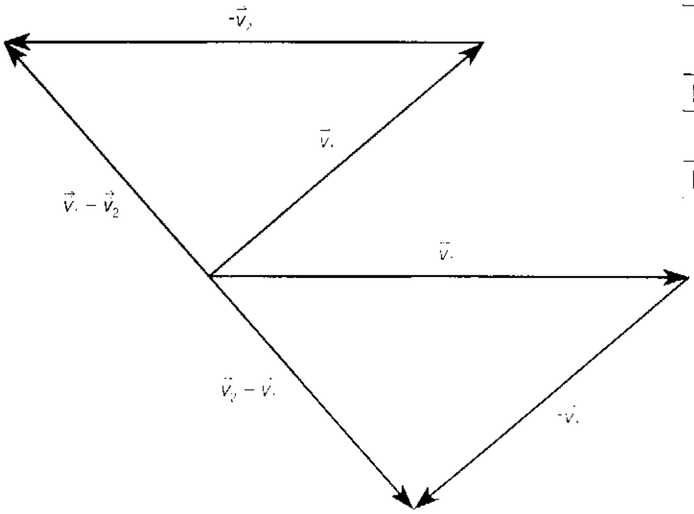
V **33.** ≈ 34,04 m, ≈ 2,8°

V **34.** ***a)*** ≈ 4,27 km/h ***b)*** À ≈ 187,5 m.

page 203

V **35.** ≈ 3,46 N

B **36.**



B **37.** ***a)*** $\overrightarrow{AC}$ ***b)*** $\overrightarrow{AB}$ ***c)*** $\overrightarrow{DA}$

d) 0 ***e)*** $\overrightarrow{CD}$ ***f)*** $\overrightarrow{CA}$

R **38.** À la condition que l'extrémité de chaque vecteur soit l'origine du suivant.

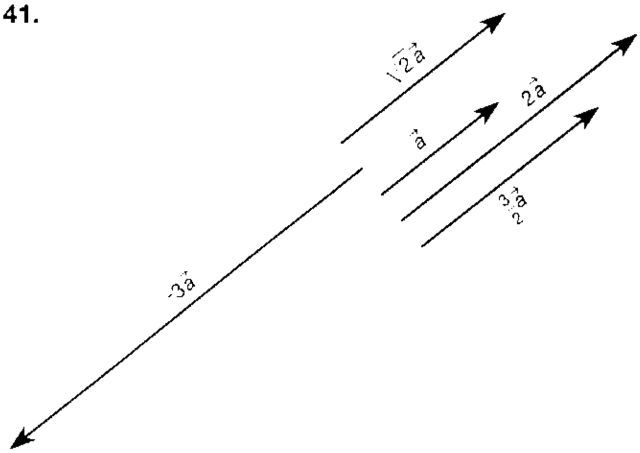
R **39.** ***a)*** Faux. ***b)*** Vrai.

page 204

B **40.** ***a)*** Ce sont deux vecteurs opposés.

b) Ce sont des vecteurs égaux.

B **41.**



B **42.** ***a)*** $C\left(-\frac{5}{4}, 1\right)$ ***b)*** $C(-17, 10)$

B **43.** ***a)*** Non. ***b)*** 12

c) 12,96 ***d)*** 135°

e) $\approx$ 25,9° ***f)*** $\approx$ 41,7°

B **44.** ***a)*** $2\sqrt{10}$ cm, $\approx$ 71,6°

b) $6\sqrt{2}$ cm, $\approx$ 315°

c) $\approx$ 6,48 cm, $\approx$ 19,1°

d) $\approx$ 9,27 cm, $\approx$ 207,2°

page 205

B **45.** $(-1, 1{,}5) = -\frac{2}{3}(1{,}5, -2{,}25)$

R **46.** Non, si $\overrightarrow{PQ} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{RT} \neq \vec{0}$.

R **47.** $k_1\vec{u} + k_2\vec{v} = \vec{0}$

$$k_1\vec{u} = -k_2\vec{v}$$

$$\vec{u} = -\frac{k_2}{k_1}\vec{v} \text{ (car } k_1 \neq 0\text{, par hypothèse)}$$

Donc, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

B **48.** ***a)*** (6, 8) ***b)*** (-15, 7)

c) (-30, 28) ***d)*** (2, 6)

B **49.** ***a)*** Projection orthogonale : $\approx$ 2,3 cm

$\vec{u} \bullet \vec{v} \approx 12{,}66$

b) Projection orthogonale : $\approx$ -0,64 cm

$\vec{u} \bullet \vec{v} \approx -3{,}69$

R **50.** ***a)*** $\approx$ 55,5°

b) 11

c) 11

d)
$$\begin{aligned}\vec{u} \bullet \vec{v} &= (a, b) \bullet (c, d)\\ &= ac + bd\\ &= ca + db\\ &= (c, d) \bullet (a, b)\\ &= \vec{v} \bullet \vec{u}\end{aligned}$$

R **51.** Le produit scalaire de deux vecteurs est un scalaire. Si on refait un produit, ce doit alors être le produit d'un scalaire par un vecteur, donc pas la même opération.

page 206

R **52.**
$$\begin{aligned}\vec{u} \bullet (\vec{v} \bullet \vec{w}) &= (a, b) \bullet ((c, d) + (e, f))\\ &= (a, b) \bullet (c + e, d + f)\\ &= a(c + e) + b(d + f)\\ &= ac + ae + bd + bf\\ &= ac + bd + ae + bf\\ &= (a, b) \bullet (c, d) + (a, b) \bullet (e, f)\\ &= \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}\end{aligned}$$

B **53.** ***a)*** 10 ***b)*** 0 ***c)*** 7

B **54.** ***a)*** 3 ***b)*** -24 ***c)*** -1

B **55.** ***a)*** Orthogonaux et colinéaires.

b) Orthogonaux.

c) Colinéaires.

R **56.**
$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{AC}\| \cos\theta$$
$$10 = 5 \times 2 \cos\theta$$
$$1 = \cos\theta \Rightarrow \theta = 0°$$

Donc, l'angle entre les deux vecteurs est nul et les vecteurs sont colinéaires.

R **57.** Partie 1 : ($\rightarrow$)

$$\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\| &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos 90°\\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{u} - \vec{v}\| &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos 90°\\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\end{aligned}$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$$

Partie 2 : ($\leftarrow$)

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos (180° -$$

$\|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$

$\|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{u} + \vec{v}\|$

$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(180° - \theta) =$
$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$

$-2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(180° - \theta) = -2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$

$\cos(180° - \theta) = \cos\theta$

$\theta = 90°$

Donc, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires.

B **58.** La norme de ce vecteur est 1.

R **59.** Pose du problème

Hypothèse : $\vec{v} = (a, b)$

Conclusion : $\left\|\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right\| = 1$

Preuve

1° $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

2° $\left\|\dfrac{\vec{v}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\| = \left\|\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right\|$

$= \sqrt{\dfrac{a^2}{a^2+b^2} + \dfrac{b^2}{a^2+b^2}}$

$= \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2}}$

$= \sqrt{1} = 1$

B **60.** (6, 8) et (-6, -8)

B **61.** ***a)*** $\vec{u} + 3\vec{v}$ ***b)*** $-1{,}5\vec{u} - 2\vec{v}$

page 207

B **62.** ***a)*** $a = 2{,}5\sqrt{3}$ et $b = 2{,}5$

b) $a = -3$ et $b = 3$

c) $a = 2$ et $b = -2\sqrt{3}$

R **63.** $k_1 = \dfrac{5\sqrt{3}}{3} \approx 2{,}89$

$k_2 = \dfrac{5\sqrt{3}}{6} \approx 1{,}44$

page 208

B **64.** ***a)*** $\vec{v} = \vec{e} + 2\vec{f}$ ***b)*** $\vec{u} = -2\vec{e} - 3\vec{f}$

B **65.** ***a)*** $\overrightarrow{AC} = (2, 3)$ et $\overrightarrow{AB} = (-3, 4)$

b) $\overrightarrow{BC} = 5\vec{i} - \vec{j}$

c) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

B **66.** ***a)*** $a = -2$ et $b = 1$ ***b)*** $a = 2$ et $b = -\frac{1}{2}$

B **67.** (1, 2), car $\vec{z} = \vec{u} + 2\vec{v}$

B **68.** $a = 3$

B **69.** ***a)*** $\overrightarrow{OD} = -3\overrightarrow{OB} + 10\overrightarrow{OC}$

b) $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OB} + 6\overrightarrow{OC}$

B **70.** $r = \frac{2}{11}$ et $s = \frac{25}{11}$

B **71.** ***a)*** $0\vec{i} - 5\vec{j}$ ***b)*** $-17\vec{i} + 18\vec{j}$

c) $-6\vec{i} + 9\vec{j}$

page 209

N **72.** Pose du problème

Hypothèse : M est le point milieu de AB.
$A(x_1, y_1)$
$B(x_2, y_2)$

Conclusion : $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Preuve

1° $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$
(par la relation de Chasles)

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$
(par la relation de Chasles)

2° $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}$
(par addition des deux équations)

$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MA}$
(par hypothèse)

$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$
(par la relation de Chasles)

$\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$ (par division par 2)

3° $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(x_1, y_1) + \frac{1}{2}(x_2, y_2)$
(par substitution)

4° Donc, on a $M\left(\dfrac{(x_1 + x_2)}{2}, \dfrac{(y_1 + y_2)}{2}\right)$,
car l'origine de $\overrightarrow{OM}$ est (0, 0).

R **73.** Pose du problème

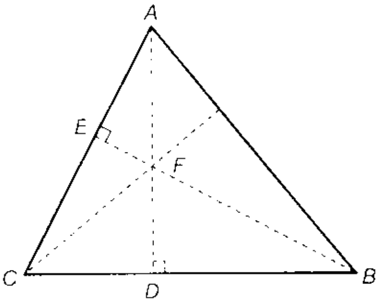
Hypothèse : Le $\Delta\ ABC$ est quelconque.

$\overline{BE} \perp \overline{AC}$

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$

F est le point d'intersection de $\overline{AD}$ et $\overline{BE}$.

Conclusion : $\overline{CF} \perp \overline{AB}$



Preuve

1° $\overrightarrow{CF} \bullet \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}) \bullet (\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB})$
(par la relation de Chasles)

$= \overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{AF} \bullet \overrightarrow{AF} +$
$\overrightarrow{AF} \bullet \overrightarrow{FB}$ (par distributivité)

$= \overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{AF} + 0 + \|\overrightarrow{AF}\|^2 + \overrightarrow{AF} \bullet \overrightarrow{FB}$
(car $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{FB}$)

$= \overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AF} \bullet \overrightarrow{FB} + \|\overrightarrow{AF}\|^2$
(par commutativité)

$= \overrightarrow{AF} \bullet (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{FB}) + \|\overrightarrow{AF}\|^2$
(par distributivité)

$= \overrightarrow{AF} \bullet (\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB}) + \|\overrightarrow{AF}\|^2$
(par la relation de Chasles)

$= \overrightarrow{AF} \bullet (\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FA}) + \|\overrightarrow{AF}\|^2$
(par commutativité)

$= \overrightarrow{AF} \bullet (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{FA}) + \|\overrightarrow{AF}\|^2$
(par la relation de Chasles)

$= \overrightarrow{AF} \bullet \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AF} \bullet \overrightarrow{FA} + \|\overrightarrow{AF}\|^2$
(par distributivité)

$= 0 + \overrightarrow{AF} \bullet \overrightarrow{FA} + \|\overrightarrow{AF}\|^2$ (car $\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{CB}$)

$= -\|\overrightarrow{AF}\|^2 + \|\overrightarrow{AF}\|^2$
(par définition du carré scalaire)

$= 0$ (par addition de nombres opposés)

2° Donc, $\overline{CF} \perp \overline{AB}$.

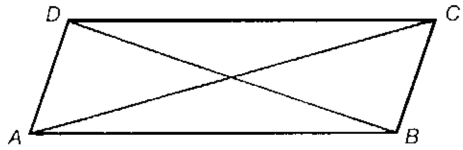
N **74.** C'est un parallélogramme, par le théorème du parallélogramme.

R **75.** Pose du problème

Hypothèse : $ABCD$ est un parallélogramme.

$\overline{AC}$ et $\overline{BD}$ sont les diagonales.

Conclusion : $(\text{m } \overline{AC})^2 + (\text{m } \overline{BD})^2 = (\text{m } \overline{AB})^2 + (\text{m } \overline{BC})^2 + (\text{m } \overline{CD})^2 + (\text{m } \overline{DA})^2$



Preuve

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (relation de Chasles)

$\overrightarrow{AC} \bullet \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \bullet$
(par distributivité)

(1) $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + 2\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{BC} + \|\overrightarrow{BC}\|^2$
(par définition du carré scalaire

De même :

(2) $\|\overrightarrow{BD}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \|\overrightarrow{CD}\|^2 + 2\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{CD}$

$\|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{BD}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \|\overrightarrow{CD}$
$2\overrightarrow{BC} \bullet (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$ (addition des équations (1) et (2) et distributivité)

$= \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \|\overrightarrow{CD}$
(addition de vecteurs et produ scalaire de $\vec{0} \bullet \overrightarrow{AC}$)

$= \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \|\overrightarrow{CD}\| + \|\overrightarrow{DA}$
(par hypothèse)

N **76.** ***a)*** $\approx 74{,}7°$ et $\approx 105{,}3°$

b) $\sqrt{29} \approx 5{,}39$ unités et $\sqrt{17} \approx 4{,}12$ unités

R **77.** $pq(\vec{u} \bullet \vec{v}) = pq(ac + bd)$
$= pqac + pqbd$
$= paqc + pbqd$
$= (pa, pb) \bullet (qc, qd)$
$= (p(a, b)) \bullet (q(c, d))$
$= (p\vec{u}) \bullet (q\vec{v})$

R **78.** ***a)*** Soit $\vec{v} = (a, b)$.
$\vec{v} \bullet \vec{0} = (a, b) \bullet (0, 0)$
$= 0a + 0b = 0$

b) Soit $\vec{w} = (c, d)$.
Si $\vec{w} \perp \vec{w}$, $(c, d) \bullet (c, d) = 0$
$c^2 + d^2 = 0$
$c^2 = -d^2 \Rightarrow c = d = 0$ (d'où $\vec{w} = \vec{0}$)
Si $\vec{w} = \vec{0}$, $\vec{w} \bullet \vec{w} = 0 + 0 = 0$
et les vecteurs sont orthogonaux.
Donc, $\vec{w} \perp \vec{w}$.

page 210

B | **79.** ***a)*** Il est unitaire.

b) $(\cos \theta, \sin \theta)$

V | **80.** ***a)*** 300 N

b) ≈ 61,22 kg

c) $a = 4{,}9$ m/s^2

page 211

V | **81.** ***a)*** À 24 km.

b) $\frac{5}{13}$

c) 40 km

d) 1) $24\vec{i} + 10\vec{j}$ 2) $24\vec{i} - 32\vec{j}$

e) $\overrightarrow{BP} = \dfrac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2}$

f) -420

V | **82.** $\vec{v}_1$: ≈ 24,46 m; ≈ 28,1°

$\vec{v}_2$: ≈ 48,91 m; ≈ 332,0°

$\vec{v}_3$: ≈ 48,91 m; ≈ 28,1°

page 212

Capsule d'évaluation 9

1. ***a)*** 7 N; 240° ***b)*** F_1 : 2 N; 90°
F_2 : 2 N; 220°
F_3 : 5 N; 330°

2. ***a)*** 12,36 cm; 0°

b) 0,57 cm; 180°

c) ≈ 3,57 cm; ≈ 232,6°

d) ≈ 5,35 cm; ≈ 273,6°

3. ***a)*** $2\sqrt{5}$; ≈ 63,4° ***b)*** $2\sqrt{5}$; ≈ 26,6°

4. ***a)*** Vrai. ***b)*** Vrai. ***c)*** Faux.
d) Vrai ***e)*** Vrai. ***f)*** Vrai.

page 213

5. ***a)*** (1, 1) ***b)*** (-11, 11)
c) -9 ***d)*** (42, -14)

6. ***a)*** $\sqrt{26}$ ***b)*** ≈ 98,1°

7. ***a)*** $\overrightarrow{PS}$ ***b)*** $\vec{0}$ ***c)*** $4\overrightarrow{EF}$

8. ≈ 680°

9. ***a)*** $\vec{k} = 4\vec{n}$ ***b)*** $\|\vec{u}\| = 1{,}625 \|\vec{p}\|$

10. Non, car $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires entre eux, mais non colinéaires à $\overrightarrow{CD}$.

11. Ils doivent être linéairement indépendants (ou non colinéaires).

page 214

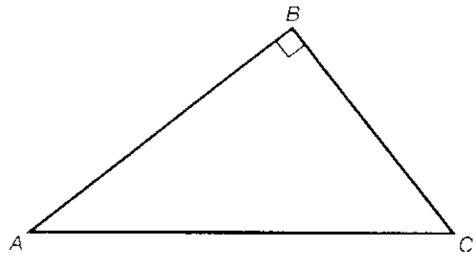
12. ***a)*** $\|\vec{w}\| = 5$ ***b)*** ≈ 351,9°

13. $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ et $\vec{v} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$

14. Pose du problème

Hypothèse : *ABC* est un triangle.
A(-2, -3)
B(2, 3)
C(8, -1)

Conclusion : Le triangle *ABC* est rectangle en *B*.



Preuve

1° On a : $\overrightarrow{BA} = (-4, -6)$ et
$\overrightarrow{BC} = (6, -4)$.

2° $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = (-4, -6) \bullet (6, -4)$
$= -24 + 24$
$= 0$

3° D'où $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$.

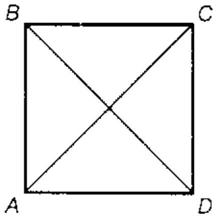
4° Donc, le triangle *ABC* est rectangle en *B*.

15. $\approx 60{,}3°$

16. Pose du problème

Hypothèse : *ABCD* est un carré.
$\overline{AC}$ et $\overline{BD}$ sont les diagonales.

Conclusion : m $\overline{AC}$ = m $\overline{BD}$



Preuve

1° $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\|$ (par la relation de Chasles)

2° $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 - 2\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{BC}\|\cos\theta}$
(par définition)

3° $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2}$ (car $\theta = 90°$)

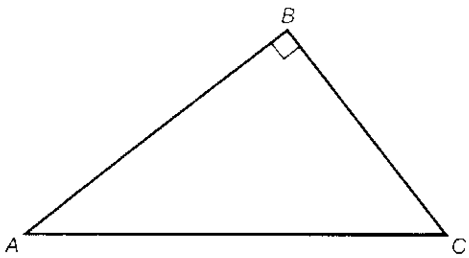
4° De même : $\|\overrightarrow{BD}\| = \|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\|$
(par la relation de Chasles)

5° $\|\overrightarrow{BD}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{BC}\|^2 + \|\overrightarrow{CD}\|^2}$
(par définition et du fait que $\theta = 90°$)

6° Donc, $\|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{BD}\|$.
(Les mesures du côté du carré sont égales.)

17. Pose du problème

Hypothèse : Soit un triangle *ABC*.
m $\angle B = 90°$



Conclusion : $(\text{m } \overline{AB})^2 + (\text{m } \overline{BC})^2 = (\text{m } \overline{AC})^2$

Preuve

1° $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\|$ (par la relation de Chasles)

2° $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 - 2\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{BC}\| \cos 90°$
(par la loi du cosinus et par hypothèse)

3° Donc, $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2$.
(La mesure au carré de l'hypoténuse est égale à la somme des mesures au carré des cathètes.)

18. Force verticale : 50 N

Force horizontale : $\approx$ 86,60 N

page 216

Rencontre avec John Napier

a) Environ 200 fois.

b) Environ 158 fois.