VISION 7 Les systèmes d'équations et d'inéquations et l'optimisation

SAÉ 13 *Les ascenseurs*

Page 247

Voici un exemple de démarche qui peut permettre aux élèves de résoudre cette SAÉ.

- Choisir la soumission la plus économique.

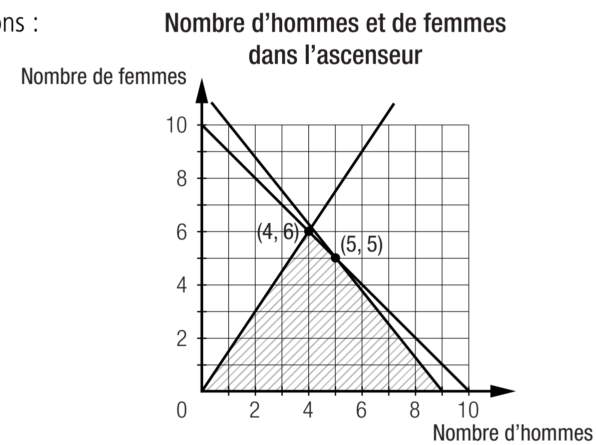
  Pour chacune des soumissions, les variables x et y représentent respectivement le nombre d'hommes et de femmes travaillant dans cette entreprise.

Soumission A :

Contrainte	Inéquation
Le nombre d'hommes transportés ne peut être inférieur à zéro.	$x \geq 0$
Le nombre de femmes transportées ne peut être inférieur à zéro.	$y \leq 0$
Dans cette entreprise, le double du nombre de femmes n'est pas plus grand que le triple du nombre d'hommes.	$2y \leq 3x$
L'ascenseur peut contenir au plus 10 personnes.	$x + y \leq 10$
La masse moyenne d'un homme est de 75 kg et celle d'une femme est de 60 kg et la charge maximale de l'ascenseur est 675 kg.	$75x + 60\ y \leq 675$

Voici le polygone de contraintes traduisant ce système d'inéquations :

Les couples du polygone de contraintes maximisant le nombre d'employés dans l'ascenseur sont (4, 6) et (5, 5).



Sachant qu'il en coûte 0,01 $/kg à transporter par cet ascenseur et que la masse moyenne d'un homme est de 75 kg et celle d'une femme 60 kg, la situation où on peut transporter un maximum de personnes à un moindre coût est :

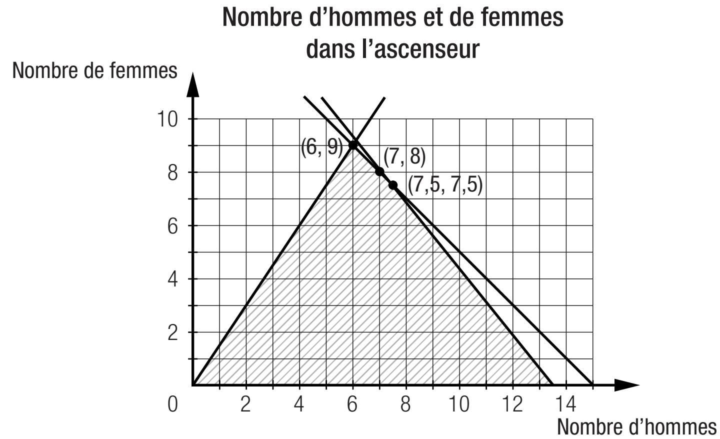
Nombre d'hommes	Nombre de femmes	Coût ($)	Coût/personne ($)
4	6	6,60	0,66
5	5	6,75	0,675

Soumission B :

Contrainte	Inéquation
Le nombre d'hommes transportés ne peut être inférieur à zéro.	$x \geq 0$
Le nombre de femmes transportées ne peut être inférieur à zéro.	$y \leq 0$
Dans cette entreprise, le double du nombre de femmes n'est pas plus grand que le triple du nombre d'hommes.	$2y \leq 3x$
L'ascenseur peut contenir au plus 15 personnes.	$x + y \leq 15$
La masse moyenne d'un homme est de 75 kg et celle d'une femme est de 60 kg et la charge maximale de l'ascenseur est 1012,5 kg.	$75x + 60\ y \leq 1012,5$

Voici le polygone de contraintes traduisant ce système d'inéquations :

Les couples du polygone de contraintes maximisant le nombre d'employés dans l'ascenseur sont (6, 9) et (7, 8).



Sachant qu'il en coûte 0,01 \$/kg à transporter par cet ascenseur et que la masse moyenne d'un homme est de 75 kg et celle d'une femme 60 kg, la situation où on peut transporter un maximum de personnes à un moindre coût est :

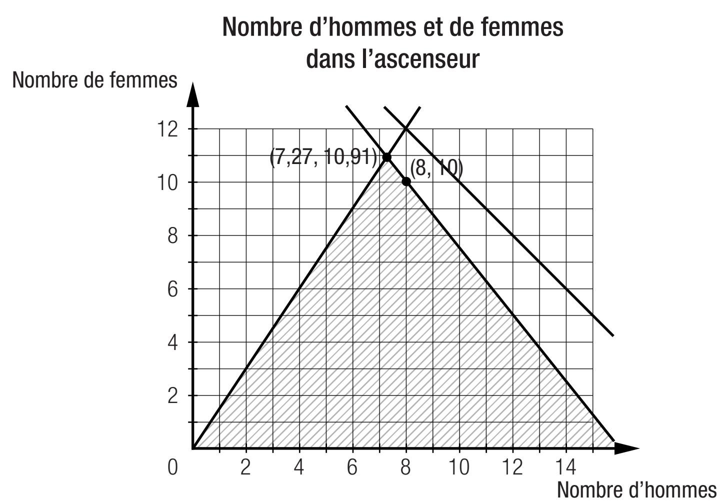
Nombre d'hommes	Nombre de femmes	Coût (\$)	Coût/personne (\$)
6	9	9,90	0,66
7	8	10,05	0,67

Soumission C :

Contrainte	Inéquation
Le nombre d'hommes transportés ne peut être inférieur à zéro.	$x \geq 0$
Le nombre de femmes transportées ne peut être inférieur à zéro.	$y \geq 0$
Dans cette entreprise, le double du nombre de femmes n'est pas plus grand que le triple du nombre d'hommes.	$2y \leq 3x$
L'ascenseur peut contenir au plus 20 personnes.	$x + y \leq 20$
La masse moyenne d'un homme est de 75 kg et celle d'une femme est de 60 kg et la charge maximale de l'ascenseur est 1350 kg.	$75x + 60\ y \leq 1200$

Voici le polygone de contraintes traduisant ce système d'inéquations :

Le couple du polygone de contraintes maximisant le nombre d'employés dans l'ascenseur est (8,10).



Sachant qu'il en coûte 0,0075 \$/kg à transporter par cet ascenseur et que la masse moyenne d'un homme est de 75 kg et celle d'une femme 60 kg, la situation où on peut transporter un maximum de personnes à un moindre coût est :

Nombre d'hommes	Nombre de femmes	Coût (\$)	Coût/personne (\$)
8	10	9	0,5

C'est avec la soumission C, lorsque l'ascenseur transporte 8 hommes et 10 femmes, que le maximum de personne peut être transporté au moindre coût.

- Déterminer comment les ascenseurs doivent se déplacer pour monter l'ensemble du personnel le plus rapidement possible.

  Attendu que :

  – 80 personnes travaillent à chacun des trois étages supérieurs ;
  – il y a deux ascenseurs identiques ;
  – chaque ascenseur peut transporter 18 personnes à la fois ;
  – qu'un ascenseur nécessite 25 s de chargement et de déchargement ;
  – qu'un ascenseur prend 6 s pour passer d'un étage à l'autre.

  Nous supposons que :

  – chaque ascenseur prendra, lorsque possible, une capacité maximale de passagers (18 personnes) ;
  – aucun ascenseur ne prendra ou ne laissera de passagers en descendant ;
  – les employés se présentent au rez-de-chaussée en même temps au début d'une journée et prennent l'ascenseur.

  Les ascenseurs A et B fonctionnent simultanément. Après que l'ascenseur A ait monté toutes les personnes travaillant au 1^e^ étage, cet ascenseur monte des personnes travaillant au 2^e^ étage. Après que l'ascenseur B ait monté toutes les personnes travaillant au 3^e^ étage, cet ascenseur monte des personnes travaillant au 2^e^ étage.

Ascenseur A

Numéro du voyage	Étage	Temps (s)	Nombre de personnes transportées
1^er^	1	$2 \times 25 + 2 \times 6 = 62$	18
2^e^	1	$2 \times 25 + 2 \times 6 = 62$	18
3^e^	1	$2 \times 25 + 2 \times 6 = 62$	18
4^e^	1	$2 \times 25 + 2 \times 6 = 62$	18
5^e^	1 et 2	$3 \times 25 + 4 \times 6 = 99$	16
6^e^	2	$2 \times 25 + 4 \times 6 = 74$	18
7^e^	2	$2 \times 25 + 4 \times 6 = 74$	18

Le temps total d'utilisation de cet ascenseur est 495 s ou 8 min 15 s.

Ascenseur B

Numéro du voyage	Étage	Temps (s)	Nombre de personnes transportées
1^er^	3	$2 \times 25 + 6 \times 6 = 86$	18
2^e^	3	$2 \times 25 + 6 \times 6 = 86$	18
3^e^	3	$2 \times 25 + 6 \times 6 = 86$	18
4^e^	3	$2 \times 25 + 6 \times 6 = 86$	18
5^e^	3	$2 \times 25 + 6 \times 6 = 86$	8
6^e^	2	$2 \times 25 + 2 \times 6 = 62$	18
7^e^	2	$2 \times 25 + 2 \times 6 = 62$	18

Le temps total d'utilisation de cet ascenseur est 554 s ou 9 min 14 s.

Parmi les soumissions proposées, les ascenseurs de la soumission C sont ceux dont l'utilisation est la moins coûteuse, soit 0,50 $ par personnes transportées. Suite à l'étude de plusieurs scénarios possibles, nous avons déduit que l'utilisation simultanée des deux ascenseurs selon les déplacements détaillés précédemment permet de monter l'ensemble du personnel aux étages supérieurs en seulement 9 min 14 s. Cette organisation efficace du déplacement des ascenseurs permet de maximiser le temps de travail du personnel. De plus, les ascenseurs effectuant au total un nombre minimal de transports, soit 14, l'entreprise s'assure d'une utilisation minimale de l'énergie nécessaire à leur fonctionnement. L'ensemble de ces stratégies permettra à l'entreprise de s'assurer d'une saine gestion.

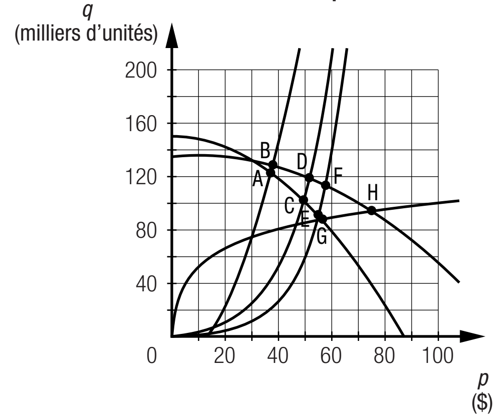
L'offre et la demande

Page 248

Voici un exemple de démarche qui peut permettre aux élèves de résoudre cette SAÉ.

Il s'agit de calculer le montant des transactions pour chaque point d'équilibre, c'est-à-dire pour chaque intersection d'une courbe représentant l'offre avec une courbe représentant la demande.

Offre et demande pour un nouveau produit



A) Élimination de quelques points

Sans même calculer, on peut déduire que certains points n'engendreront pas un montant maximum des transactions.

Point éliminé	Explication
A	Il est associé à un prix d'équilibre plus faible et à une quantité d'équilibre plus faible que le point B. Le montant des transactions sera donc plus faible.
C	Il est associé à un prix d'équilibre plus faible et à une quantité d'équilibre plus faible que le point D. Le montant des transactions sera donc plus faible.
E	Il est associé à un prix d'équilibre plus faible et à une quantité d'équilibre plus faible que le point F. Le montant des transactions sera donc plus faible.
G	Il est associé à un prix d'équilibre plus faible et à une quantité d'équilibre plus faible que le point H. Le montant des transactions sera donc plus faible

B) Calcul des coordonnées des points B, D, F et H

Le point B correspond à l'intersection des courbes représentant l'offre 1 et la demande 1. Le système formé peut être résolu algébriquement.

${}^{-}0{,}01p^2 + 0{,}2p + 135 = 0{,}1p^2 + 0{,}15p - 20$
${}^{-}0{,}11p^2 + 0{,}05p + 155 = 0$
$p \approx 37{,}77$ \$
$q \approx 0{,}1(37{,}77)^2 + 0{,}15(37{,}77) - 20$, soit environ 128,32 milliers d'unités.

Le point D correspond à l'intersection des courbes représentant l'offre 2 et la demande 1. La solution du système formé peut être estimée graphiquement, puis approximée à l'aide d'une table de valeurs.

Graphiquement, on trouve que le prix d'équilibre est compris entre 50 \$ et 52 \$

p	50	51	52
$q = {}^{-}0{,}01p^2 + 0{,}2p + 135$	≈ 120	$\approx 119{,}19$	$\approx 118{,}36$
$q = 1{,}4^{0{,}2(p+20)} - 4$	$\approx 107{,}12$	$\approx 114{,}86$	$\approx 123{,}13$

p	51,46	51,47	51,48	51,49
$q = {}^{-}0{,}01p^2 + 0{,}2p + 135$	$\approx 118{,}81$	$\approx 118{,}8$	$\approx 118{,}79$	$\approx 118{,}79$
$q = 1{,}4^{0{,}2(p+20)} - 4$	$\approx 118{,}59$	$\approx 118{,}67$	$\approx 118{,}76$	$\approx 118{,}84$

On trouve que $p \approx 51{,}48$ \$ et $q \approx 118{,}76$ milliers d'unités.

Le point F correspond à l'intersection des courbes représentant l'offre ③ et la demande ①. La solution du système formé peut être estimée graphiquement puis approximée à l'aide d'une table de valeurs.

Graphiquement, on trouve que le prix d'équilibre est compris entre 55 $ et 60 $.

p	57,50	57,501	57,502
$q = {}^{-}0{,}01p^2 + 0{,}2p + 135$	≈ 113,44	≈ 113,44	≈ 113,44
$q = 5{,}2^{0{,}05p} - 1$	≈ 113,42	≈ 113,43	≈ 113,44

On trouve que $p \approx 57{,}5$ $ et $q \approx 113{,}44$ milliers d'unités.

Le point H correspond à l'intersection des courbes représentant l'offre ④ et la demande ①. La solution du système formé peut être estimée graphiquement puis approximée à l'aide d'une table de valeurs.

Graphiquement, on trouve que le prix d'équilibre est compris entre 73 $ et 75 $.

p	74,81	74,82	74,83
$q = {}^{-}0{,}01p^2 + 0{,}2p + 135$	≈ 94	≈ 93,98	≈ 93,97
$q = 50 \log(p + 1)$	≈ 93,99	≈ 93,99	≈ 93,99

On trouve que $p \approx 74{,}81$ $ et $q \approx 93{,}99$ milliers d'unités.

C) Prédictions concernant le montant des transactions

Il faut multiplier le prix d'équilibre par la quantité d'équilibre associés à chaque point d'intersection trouvé.

Point	Prix d'équilibre ($) ($)	Quantité d'équilibre (milliers d'unités)	Montant des transactions (k$)
B	≈ 37,77	≈ 128,32	≈ 4846,65
D	≈ 51,48	≈ 118,76	≈ 6113,76
F	≈ 57,5	≈ 113,44	≈ 6522,8
H	≈ 74,81	≈ 93,99	≈ 7031,39

La prédiction la plus optimiste concernant le montant des transactions est de 7031,39 k$.

SAÉ 15 Faire les bons choix

Page 249

Voici un exemple de démarche qui peut permettre aux élèves de produire le rapport demandé.

Les informations données permettent de comparer les modèles de boucles d'oreilles entre eux et d'effectuer certaines déductions en tenant compte des éléments ci-dessous.

- Puisque tous les modèles de boucle d'oreilles ont la même épaisseur et que le cercle qui forme le trou dans chaque modèle a le même diamètre, on peut comparer les modèles de boucles d'oreilles en faisant fi des trous. En effet, les modifications au volume et à la surface d'or à couvrir suite au perçage du trou sont les mêmes pour tous les modèles.
- Le coût de production de chaque modèle dépend du volume V et de l'aire totale A_t du solide associé à ce modèle. Or, on a $V = A_b h$ et $A_t = 2A_b + P_b h$ où P_b est le périmètre de la base, A_b est l'aire de la base, et h est l'épaisseur du solide.
- Puisque tous les modèles de boucles d'oreilles se vendent au même prix, ceux qui coûtent le moins cher à fabriquer sont à privilégier.

A) Modèle circulaire de boucles d'oreilles comparé au modèle hexagonal de boucles d'oreilles.

	Comparaison		Justification
	Modèle circulaire	Modèle hexagonale	
h	Identique		Par hypothèse.
V	Identique		Les deux solides sont équivalents.
A_b	Identique		Les bases de deux prismes droits de même volume et de même épaisseur ont forcément la même aire.
P_b	Plus petit	Plus grand	De toutes les figures planes équivalentes, le disque a le plus petit périmètre.
A_l	Plus petite	Plus grande	L'aire latérale dépend de P_b et de h. Puisque la valeur de h est la même pour les deux modèles et que P_b est plus petit pour le cercle, l'aire latérale du modèle circulaire est plus petite.
A_t	Plus petite	Plus grande	Les deux solides ont des bases équivalentes, mais le modèle circulaire a une plus petite aire latérale.
Quantité d'argent	Identique		Les deux solides ont le même volume.
Quantité d'or	Plus petite	Plus grande	Le modèle circulaire a une plus petite aire totale que le modèle hexagonal.
Coût de fabrication	Plus petit	Plus grand	Le modèle circulaire nécessite la même quantité d'argent, mais une plus petite quantité d'or.

Conclusion : Le modèle circulaire de boucles d'oreilles est plus rentable que le modèle hexagonal, car il coûte moins cher à fabriquer.

B) Modèle hexagonal de boucles d'oreilles comparé au modèle carré de boucles d'oreilles.

	Comparaison		Justification
	Modèle hexagonal	Modèle carré	
h	Identique		Par hypothèse.
P_b	Identique		Par hypothèse.
A_b	Plus grande	Plus petite	De deux polygones réguliers de même périmètre, celui qui a le plus grand nombre de côtés a la plus grande aire.
A_l	Identique		L'aire latérale dépend de P_b et de h. Puisque les valeurs de h et de P_b sont identiques pour les deux modèles de boucles d'oreilles, les deux modèles ont la même aire latérale.
A_t	Plus grande	Plus petite	Les deux modèles de boucles d'oreilles ont la même aire latérale, mais la base du modèle hexagonal a une plus grande aire.
V	Plus grand	Plus petit	V dépend des valeurs de A_b et de h. Puisque la valeur de h est identique pour les deux modèles de boucles d'oreilles et que A_b est plus grande pour le modèle hexagonal, ce dernier aura un plus grand volume.
Quantité d'argent	Plus grande	Plus petite	Le modèle hexagonal de boucles d'oreilles a un plus grand volume que le modèle carré.
Quantité d'or	Plus grande	Plus petite	Le modèle hexagonal de boucles d'oreilles a une plus grande aire totale que le modèle carré.
Coût de fabrication	Plus grand	Plus petit	Le modèle hexagonal de boucles d'oreilles nécessite plus d'argent et plus d'or que le modèle carré.

Conclusion : Le modèle carré de boucles d'oreilles est plus rentable que celui hexagonal, car il coûte moins cher à fabriquer.

C) Modèle circulaire de boucles d'oreilles comparé au modèle triangulaire de boucles d'oreilles.

	Comparaison		Justification
	Modèle circulaire	**Modèle triangulaire**	
h	Identique		Par hypothèse.
P_b	Identique		Par hypothèse.
A_b	Plus grande	Plus petite	De toutes les figues planes de même périmètre, le disque a la plus grande aire.
A_l	Identique		L'aire latérale dépend des valeurs de P_b et de h. Puisque les valeurs de h et de P_b sont identiques pour les deux modèles de boucles d'oreilles, les deux ont la même aire latérale.
A_t	Plus grande	Plus petite	Les deux modèles de boucles d'oreilles ont la même aire latérale, mais la base du modèle circulaire a une aire plus grande.
V	Plus grand	Plus petit	V dépend des valeurs de A_b et de h. Puisque la valeur de h est identique pour les deux modèles de boucles d'oreilles et que la valeur de A_b est plus grande pour le modèle circulaire, ce dernier aura un plus grand volume.
Quantité d'argent	Plus grande	Plus petite	Le modèle circulaire de boucles d'oreilles a un plus grand volume que le modèle triangulaire.
Quantité d'or	Plus grande	Plus petite	Le modèle circulaire de boucles d'oreilles a une plus grande aire totale que le modèle triangulaire.
Coût de fabrication	Plus grand	Plus petit	Le modèle circulaire de boucles d'oreilles nécessite plus d'argent et plus d'or que le modèle triangulaire.

Conclusion : Le modèle triangulaire de boucles d'oreilles est plus rentable que celui circulaire, car il coûte moins cher à fabriquer.

D) Modèle circulaire de boucles d'oreilles comparé au modèle carré de boucles d'oreilles.

	Comparaison		Justification
	Modèle circulaire	**Modèle carré**	
h	Identique		Par hypothèse.
P_b	Plus petit	Plus grand	Le carré a le même périmètre que l'hexagone, et l'hexagone a un plus grand périmètre que le cercle.
A_b	Plus grand	Plus petit	Le cercle a la même aire que l'hexagone et l'hexagone a une plus grande aire que le carré, car de deux polygones réguliers de même périmètre, celui qui a le plus grand nombre de côtés a la plus grande aire.
A_l	Plus petite	Plus grande	L'aire latérale dépend des valeurs de P_b et de h. Or, la valeur de h est identique pour les deux modèles de boucles d'oreilles et P_b est plus petit pour le modèle circulaire.
A_t	On ne peut pas conclure		A_b est plus grand pour le modèle circulaire de boucles d'oreilles, mais A_l est plus petit pour ce même modèle.
V	Plus grand	Plus petit	V dépend des valeurs de A_b et de h. Puisque la valeur de h est identique pour les deux modèles de boucles d'oreilles et que A_b est plus grande pour le modèle circulaire, ce dernier aura un plus grand volume.
Quantité d'argent	Plus grande	Plus petite	Le modèle circulaire a un plus grand volume que le modèle carré.
Quantité d'or	On ne peut pas conclure		On n'a pas pu conclure quant à l'aire totale des solides.
Coût de fabrication	On ne peut pas conclure		On n'a pas pu conclure quant à la quantité d'or à utiliser.

Conclusion : On ne peut rien conclure.

E) Conclusion

On sait que :

- le modèle circulaire de boucles d'oreilles est plus rentable que celui hexagonal ;
- le modèle carré de boucles d'oreilles est plus rentable que celui hexagonal ;
- le modèle triangulaire de boucles d'oreilles est plus rentable que celui circulaire.

Si on classe les modèles de boucles d'oreilles par ordre décroissant de rentabilité, il y a trois possibilités puisqu'il a été impossible de faire certaines conclusions quant à la rentabilité du modèle carré de boucles d'oreilles.

- modèle triangulaire → modèle circulaire → modèle carré → modèle hexagonal
- modèle triangulaire → modèle carré → modèle circulaire → modèle hexagonal
- modèle carré → modèle triangulaire → modèle circulaire → modèle hexagonal

Dans tous les cas, les dires de l'associée sont faux puisque le modèle hexagonal de boucles d'oreilles est le modèle le moins rentable.

RÉVISION 7

Réactivation 1

Page 156

a. (1,5, 2,25), (1,5, 9,375), (12, 4,125) et (12, 7,875).

b. $y = \frac{15}{28}x + \frac{81}{56}$ et $y = ^{-}\frac{1}{2}x + \frac{81}{8}$.

c. $\left(\frac{243}{29}, \frac{1377}{232}\right)$

Réactivation 2

Page 157

a. Une inclinaison maximale de 5%.

b. Non, car l'inclinaison doit être strictement inférieure à 10%.

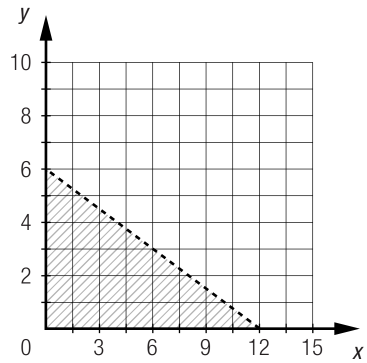
c. **1)** $x \leq \frac{434}{31}$ **2)** 14%

d. $\frac{496}{31}$ % = 16 %.

Réactivation 3

Page 158

a. **1)**



2) Non, car il ne fait pas partie de la région bleue.

b. **1)** $y \leq ^{-}3x + 12$ **2)** Oui, car il est sur la frontière.

Réactivation 4

Page 159

a. **1)** 32,076 cm^2 **2)** 82,8 cm^2

b. **1)** 53,46 cm^3 **2)** 110,4 cm^3

c. $2 \times \frac{5 \times 4{,}32 \times 2{,}97}{2} \times 5 \times \frac{1}{3} + \frac{5 \times 4{,}32 \times 2{,}97}{2} \times 6 \approx 299{,}38$ cm^3

d. $299{,}38 - 2 \times 110{,}4 \approx 78{,}58$ cm^3

$\frac{4{,}14 \times 5 \times 8}{2} \times h \approx 78{,}58$ cm^3

$h = 0{,}95$ cm

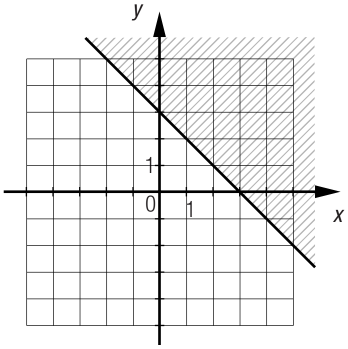
Mise à jour

1. a) $(-8, -13)$ **b)** $(14, 33)$ **c)** $(120, 0)$

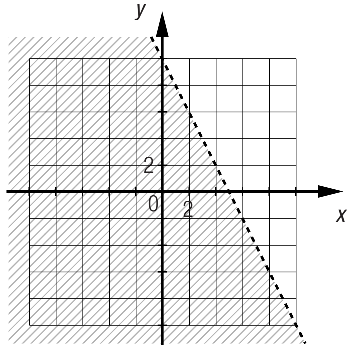
d) $\left(\frac{-32}{11}, \frac{-73}{11}\right)$ **e)** $\left(\frac{77}{48}, \frac{-3}{4}\right)$ **f)** $\left(\frac{-17}{4}, \frac{9}{4}\right)$

2. a) $x > 2$ **b)** $x \geq 22$ **c)** $x > -10$ **d)** $x < \frac{-18}{23}$ **e)** $x \leq \frac{-5}{9}$ **f)** $x \geq -21$

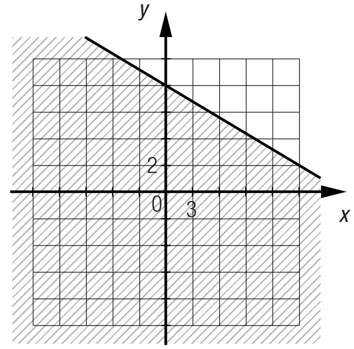
3. a)



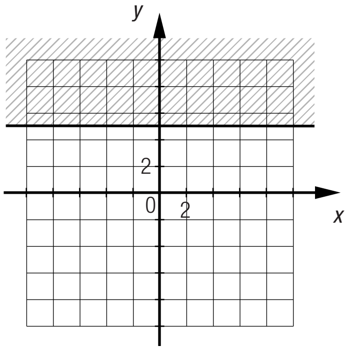
b)



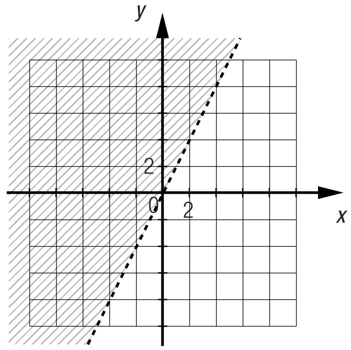
c)



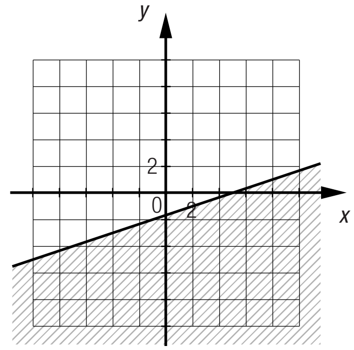
d)



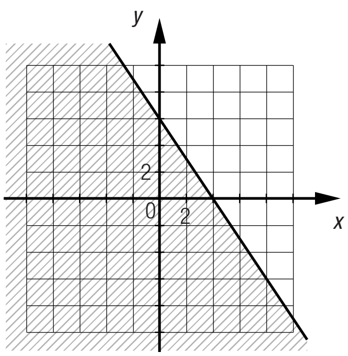
e)



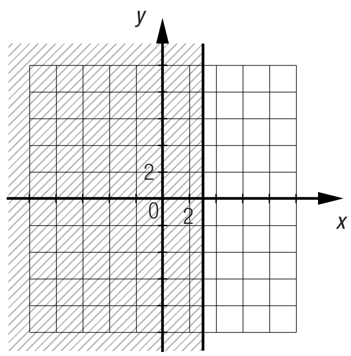
f)



g)



h)



4. a) 1) x : temps (en s)
y : hauteur (en m) d'un ascenseur
2) $y = 23 - 0{,}75x$ et $y = 2 + 0{,}5x$.
3) Les ascenseurs se rencontrent à une hauteur de 10,4 m après 16,8 s.

b) 1) x : temps (en s)
y : température (en °C) d'un liquide
2) $y = 0{,}1x + 40$ et $y = 0{,}3x + 20$.
3) Les deux liquides sont à la même température (50 °C) après 100 s.

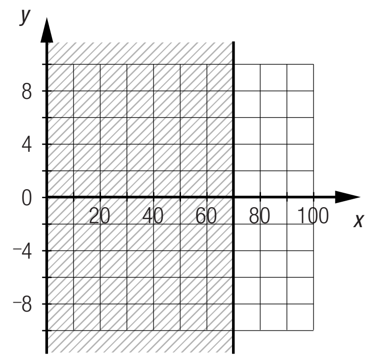
c) 1) x : temps (en s)
y : distance (en m) parcourue par un mobile
2) $y = 8x + 100$ et $y = 10x$.
3) Le second mobile rattrapera le premier dans 50 s.

Mise à jour (*suite*)

Page 165

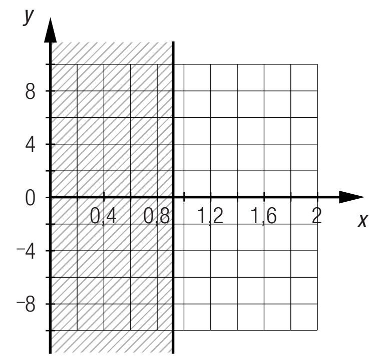
5. a) 1) $\frac{x}{2} - 5 \leq 30$

2)



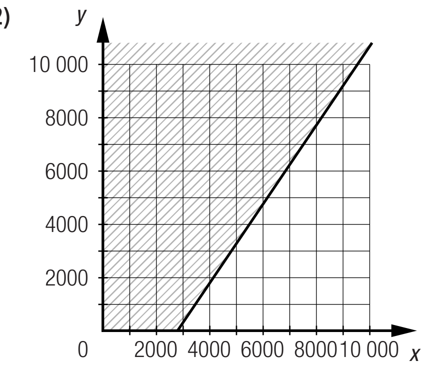
b) 1) $^-3x \geq \frac{x}{4} - 3$

2)



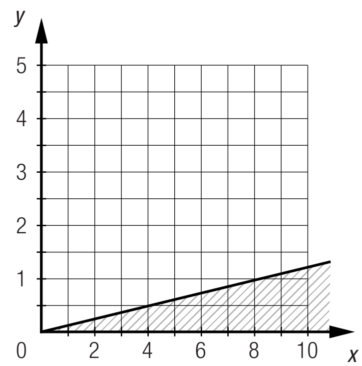
c) 1) $3x - 2y \leq 8500$

2)



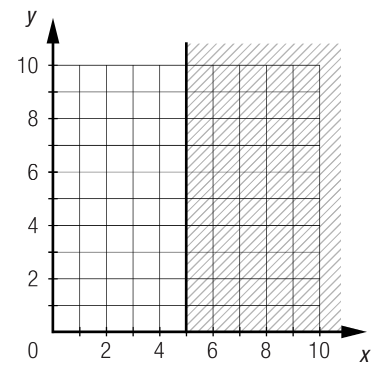
d) 1) $x \geq 8y$

2)



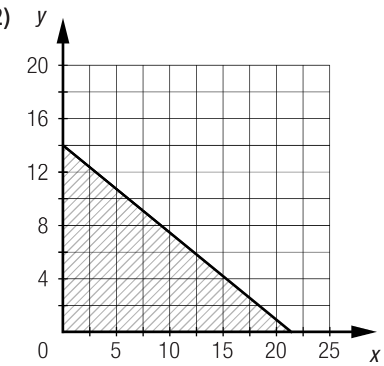
e) 1) $2x - 10 > 0$

2)



f) 1) $4x + 6y \leq 85$

2)



6. a) $y \geq \frac{2}{3}x - 30$ **b)** $y < {}^-5x + 0,2$ **c)** $y \leq {}^-x + 2$ **d)** $y > 100x + 150$

Mise à jour (*suite*)

Page 166

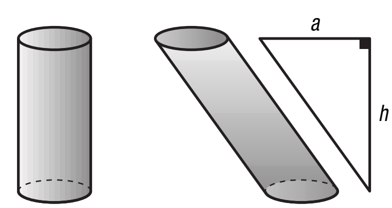
7. a) $\approx 32,08$ cm^2 **b)** $\approx 83,14$ cm^2 **c)** $\approx 46,92$ cm^2 **d)** $\approx 30,41$ cm^2 **e)** $\approx 78,54$ cm^2
f) $\approx 41,28$ cm^2 **g)** 77,14 cm^2 **h)** $\approx 141,18$ cm^2 **i)** $\approx 29,47$ cm^2

8. a) 211,47 cm^3 **b)** $\approx 853,27$ cm^3 **c)** 8,4 cm^3 **d)** $\approx 523,60$ cm^3 **e)** $\approx 160,34$ cm^3
f) 54,6 cm^3 **g)** 87,5 cm^3 **h)** $\approx 170,09$ cm^3 **i)** $\approx 141,37$ cm^3

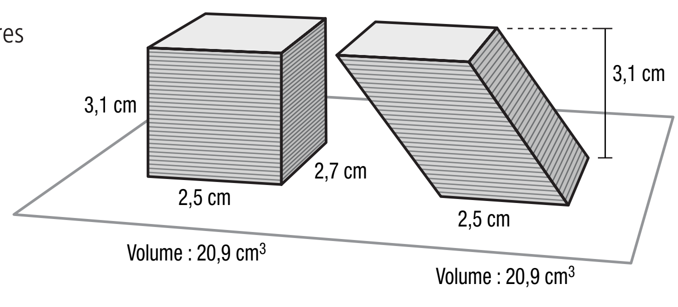
Mise à jour (*suite*)

Page 167

9. a) Non. Puisque la mesure du côté du cylindre oblique est supérieure à sa hauteur (donc à la mesure du côté du cylindre droit), l'aire latérale du cylindre oblique est supérieure à celle du cylindre droit.



b) Oui. En vertu du principe de Cavalieri, ces deux cylindres ont le même volume. Selon Cavalieri, un solide est constitué d'une infinité de plans parallèles superposés appelés « plans indivisibles ». D'après sa théorie, deux solides ont le même volume si toutes les paires de sections obtenues par des plans parallèles aux bases ont la même aire.

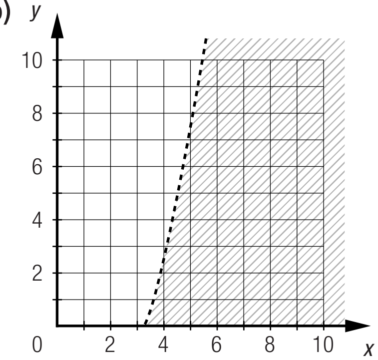


10. a) Pour le volume : $440{,}5968h \geq 8812$ Pour l'aire totale : $881{,}1936 + 78{,}12h \leq 3615$

b) $20{,}000\,145\,26 \leq h \leq 34{,}994\,961\,6$

11. a) $6x^2 > 66 + 12y$

b)



c) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* (4, 1), (5, 2) et (7, 3).

12. a) $\frac{4\pi r^3}{3} \geq \pi r^2 h$. En isolant r, on obtient $r \geq 0{,}75h$.

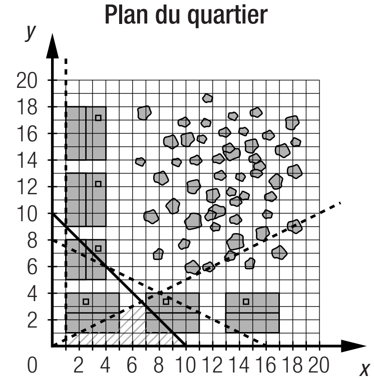
b) $\frac{4\pi r^3}{3} \leq \frac{\pi r^2 h}{3}$. En isolant r, on obtient $r \leq 0{,}25h$.

SECTION 7.1 Les systèmes d'inéquations et les polygones de contraintes

Problème

Page 168

Le sol devrait être excavé à l'intérieur du triangle représenté ci-contre.



Activité 1

Page 169

a. x représente le nombre d'hydroliennes à installer et y représente le nombre d'éoliennes à installer.

b. Le graphique 1 est associé à l'inéquation $x < \frac{1}{2}y$ et le graphique 2 est associé à l'inéquation $x + y \leq 24$.

c.

	$x < \frac{1}{2}y$	$x + y \leq 24$
A(9, 21)	**Oui**	**Non**
B(15, 15)	**Non**	**Non**
C(9, 6)	**Non**	**Oui**
D(3, 18)	**Oui**	**Oui**

d. 1) 1 et 4. **2)** 4 et 3. **3)** 4 **4)** 2

e. Non, car le nombre d'hydroliennes doit être inférieur à la moitié du nombre d'éoliennes.

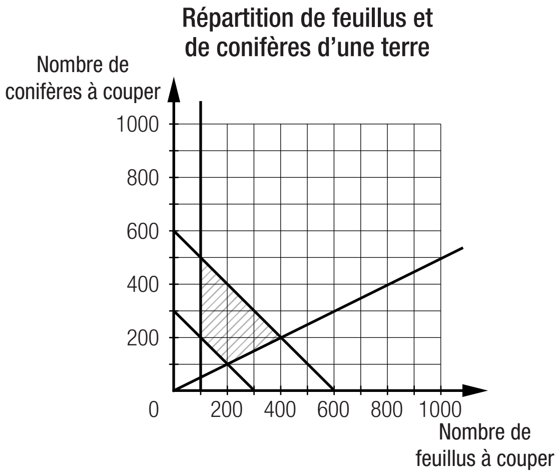
Activité 2

Page 170

a. $x \geq 100$
$x \leq 2y$
$x + y \geq 300$
$x + y \leq 600$

b. **1)** Le nombre de feuillus à couper doit être un nombre positif ou nul.
2) Le nombre de conifères à couper doit être un nombre positif ou nul.

c.



d. **1)** Oui. **2)** Non.

e. $y \leq 4x$
$y \geq 0{,}25x$
$x + y > 400$
$x + y \leq 1000$

f. $y \leq 4x$: Le nombre de conifères coupés doit être inférieur au quadruple des feuillus coupés.
$y \geq 0{,}25x$: Le nombre de conifères coupés doit être supérieur ou égal au quart des feuillus coupés.
$x + y > 400$: Le nombre total d'arbres coupés doit être supérieur à 400.
$x + y \leq 1000$: Le nombre total d'arbres coupés doit être inférieur ou égal à 1000.

g. A(80, 320), B(200, 800), C(800, 200), D(320, 80)

h. Les points A et D ne font pas partie de l'ensemble-solution, car ils sont situés sur une droite tracée en pointillé, c'est-à-dire qui ne fait par partie de la région-solution. Toutefois, les points B et C font partie de l'ensemble-solution, car ils sont situés à l'intersection de deux droites tracées d'un trait plein, c'est-à-dire qui font partie de la région-solution.

Technomath

Page 171

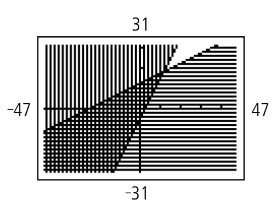
a. **1)** Le demi-plan situé au-dessus de la droite frontière doit être hachuré.
2) Le demi-plan situé au-dessous de la droite frontière doit être hachuré.

b. **1)** $y \geq 1{,}5x + 15$ **2)** $y \leq ^{-}0{,}3x - 10$

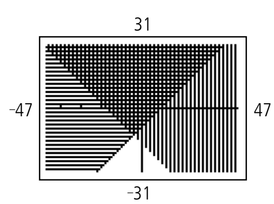
c. $y \geq x$ et $y \geq 30 - x$.

d. **1)** Le point (11, ⁻12) n'appartient pas à l'ensemble-solution du système, car il ne vérifie aucune des inéquations :
$y > x \Leftrightarrow {}^{-}12 > 11$ (faux) et $y > 30 - x \Leftrightarrow {}^{-}12 > 19$ (faux).
2) Le point (15, 26) appartient à l'ensemble-solution du système, car il vérifie les deux inéquations :
$y > x \Leftrightarrow 26 > 15$ (vrai) et $y > 30 - x \Leftrightarrow 26 > 15$ (vrai).

e. **1)**



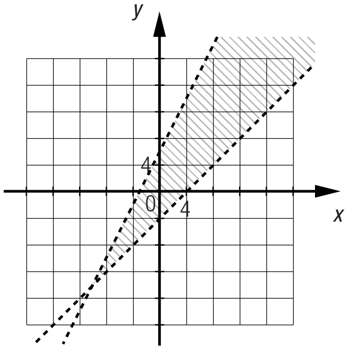
2)



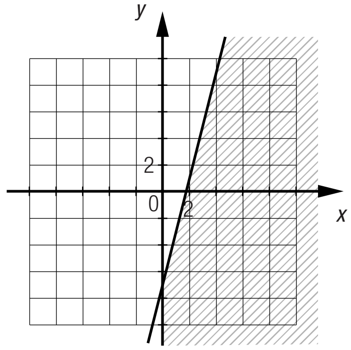
Mise au point 7.1

Page 174

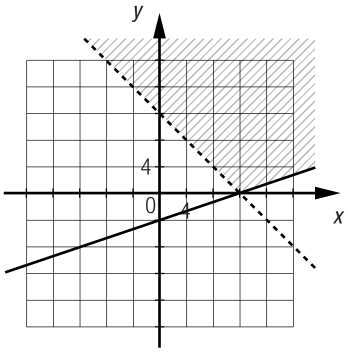
1. a)



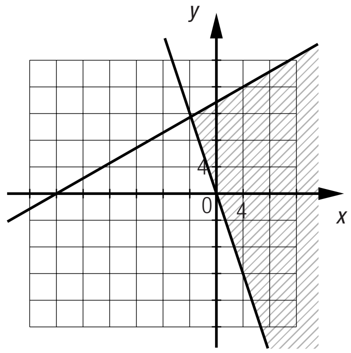
b)



c)



d)



2. a) **1)** $y < 3x - 1$ et $y \geq -\frac{1}{4}x + 2$. **2)** $y < 3x - 1$ et $y \leq -\frac{1}{4}x + 2$.

3) $y > 3x - 1$ et $y \leq -\frac{1}{4}x + 2$. **4)** $y > 3x - 1$ et $y \geq -\frac{1}{4}x + 2$.

b) Non. Puisque l'intersection est faite de deux droites dont l'une est en pointillée, elle n'appartient à aucune région-solution.

3. a) A(0, 6), B(8, 10), C(20, 0), D(0, 4)

b) A(0, 12), B(3, 15), C(7,5 15), D$\left(\frac{8}{3}, \frac{16}{3}\right)$, E(0, 8)

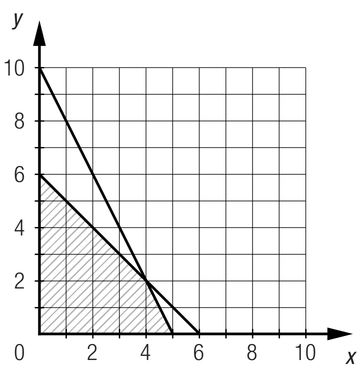
c) A(0, 8), B$\left(\frac{8}{13}, \frac{72}{13}\right)$, C(8, 0)

d) A(0, 2), B(6, 1), C(9, 0), D(0, 0)

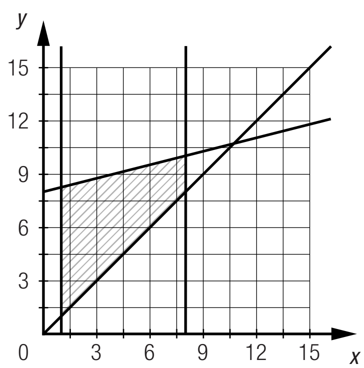
Mise au point 7.1 (*suite*)

Page 175

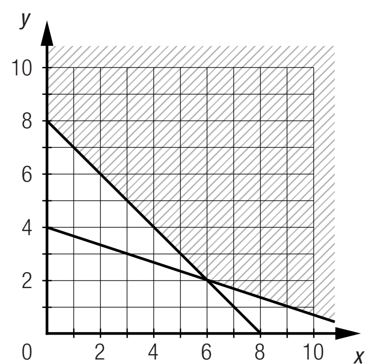
4. a)



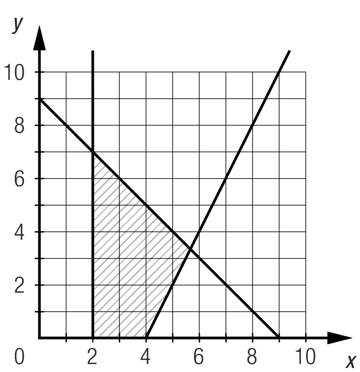
b)



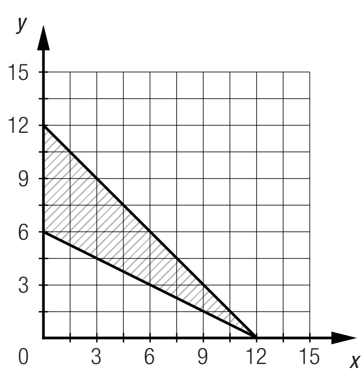
c)



d)

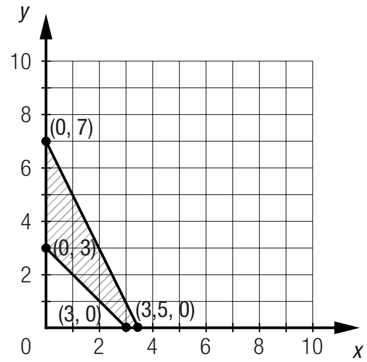


e)

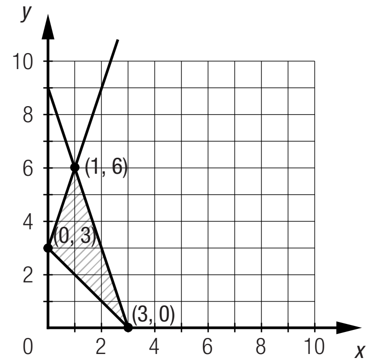


5. a) Aucun point. **b)** Aucun point. **c)** Les points D et E. **d)** Le point C. **e)** Le point E.

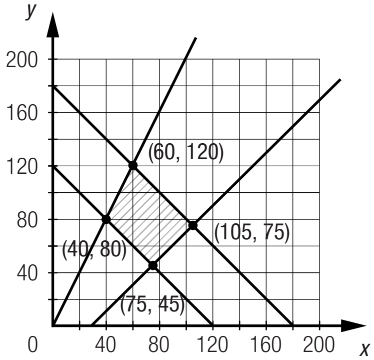
6. a)



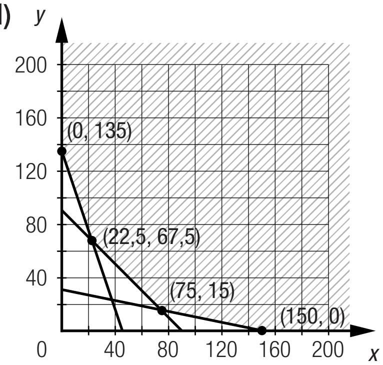
b)



c)



d)



7. a) **1)** $x \geq -3$
$y \leq 0$
$y \leq -2x - 4$
$y \geq \frac{-1}{2}x - 4$
$y > \frac{3}{2}x - 3$

2) $x \geq 0$
$y \leq 0$
$y \geq \frac{-1}{2}x - 4$
$y < \frac{3}{2}x - 3$

3) $y \geq 0$
$y < 4$
$y < \frac{3}{2}x - 3$

4) $y \leq \frac{-1}{2}x - 4$
$x \leq -3$

b) **1)** E **2)** H

8. a) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* (5, 5), (7, 9) et (10, 15).

b) Aucun point ne peut satisfaire ces conditions.

Page 176

Mise au point 7.1 (*suite*)

9. a) $x < 0$
$y \geq 3x$

b) $y \geq 0$
$x \leq 0{,}25y$

c) $x + y < 0$
$x + y > -20$

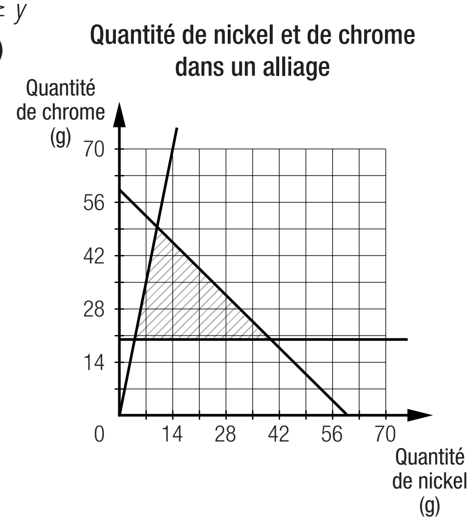
d) $x > y$
$x \leq 3y$

e) $y \geq x + 10$
$y \leq x + 25$

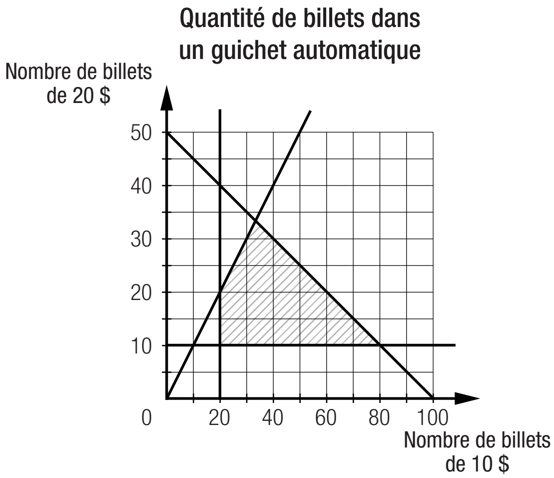
10. a) **1)** $y \geq 20$ **2)** $x + y \leq 60$ **3)** $5x \geq y$

b) Oui, car on ne peut avoir une quantité négative de nickel ou de chrome.

c)



11. a)



b) **1)** Non. **2)** Oui. **3)** Oui. **4)** Non.

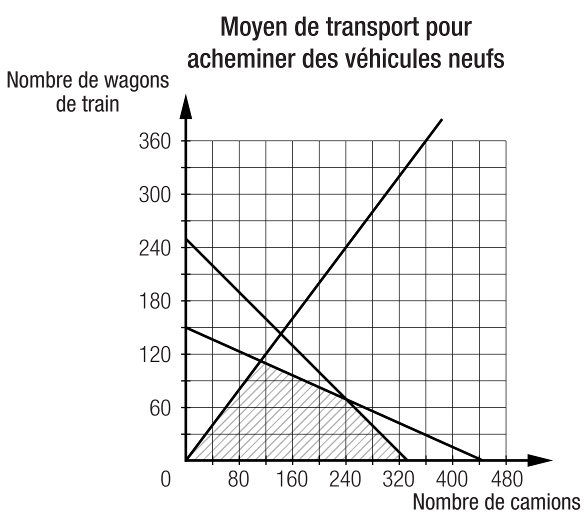
Mise au point 7.1 (*suite*) **Page 177**

12. a) A, D **b)** B **c)** C **d)** E

13. a) **1)** x : nombre de camions
y : nombre de wagons de train

2) $x \geq 0$
$y \geq 0$
$6x + 8y \leq 2000$
$4x + 12y \leq 1800$
$x \geq y$

3)



4) (0, 0), (112,5, 112,5), (240, 70) et $\left(\frac{1000}{3}, 0\right)$.

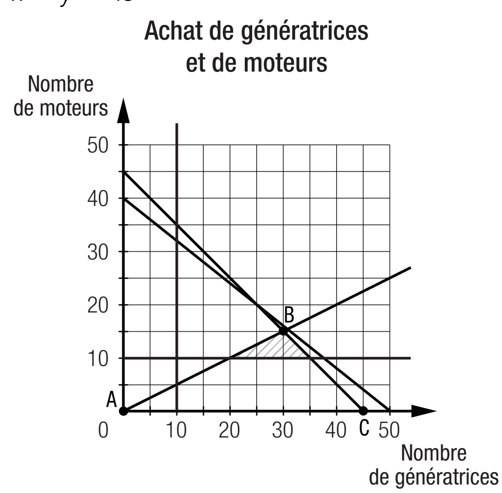
5) Chacun des sommets fait partie de l'ensemble-solution.

6) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* (80, 60), (160, 90) et (240, 30).

b) **1)** x : nombre de génératrices à acheter
y : nombre de moteurs à acheter

2) $x \geq 10$
$y \geq 10$
$2000x + 2500y \leq 100\ 000$
$x \geq 2y$
$x + y \leq 45$

3)



4) A(20, 10), B(30, 15) et C(35, 10).

5) Tous les sommets font parties de l'ensemble-solution.

6) *Plusieurs réponses possibles. Exemple* : (30, 12), (30, 10) et (28, 11).

Mise au point 7.1 (*suite*)

14. a) d_1 : 5; le nombre de cabines pour les femmes doit être supérieur au nombre de cabines pour les hommes.
d_2 : 4; il doit y avoir au moins 3 cabines pour les hommes.
d_3 : 3; il doit y avoir au moins 5 cabines pour les femmes.
d_4 : 1; le nombre total de cabines doit être supérieur à 10.
d_5 : 2; le nombre total de cabines ne doit pas excéder 15.

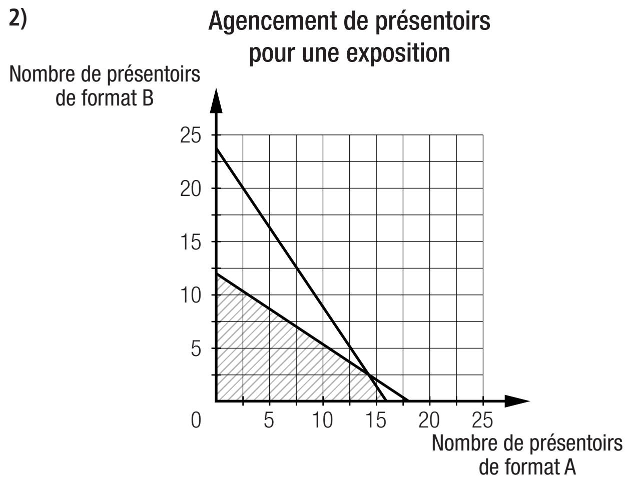
b) La contrainte 3; il doit y avoir au moins 5 cabines pour les femmes. Sans cette contrainte, le polygone resterait inchangé.

c) 1) Parce qu'elle ne devrait pas compter les solutions associées aux points (3, 7), (4, 6) et (5, 5), puisque ces solutions ne satisfont pas à la contrainte 1, le nombre total de cabines doit être supérieur à 10.

2) 21 solutions.

15. a) 1) $x \geq 0$
$y \geq 0$
$3x + 2y \leq 48$
$4x + 6y \leq 72$

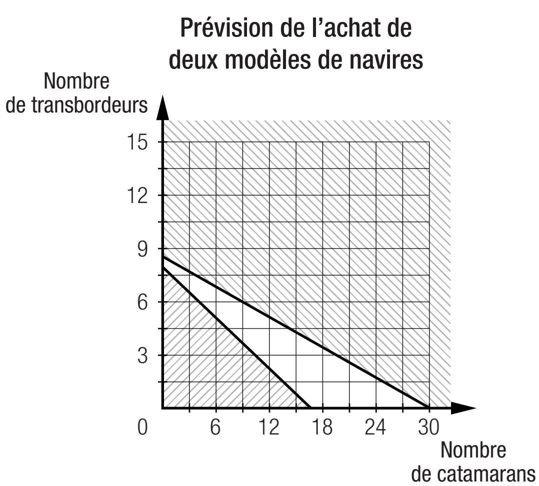
2)



b) *Plusieurs réponses possibles. Exemple* :
Oui. En utilisant par exemple 6 présentoirs de format A et 8 présentoirs de format B.

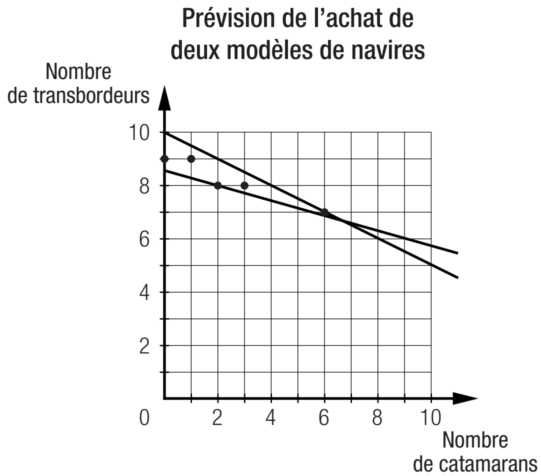
Mise au point 7.1 (*suite*)

16. a)



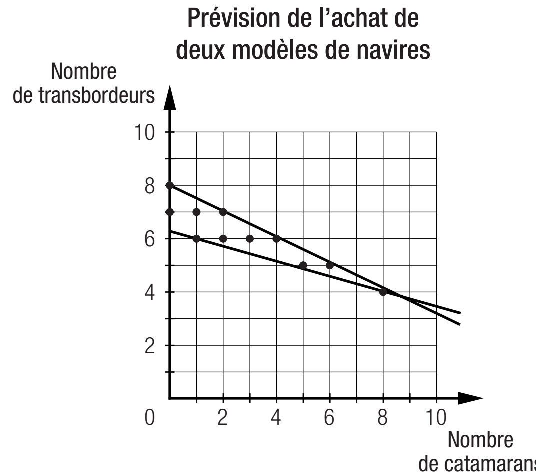
b) Non. Le système d'inéquations ne comporte aucune solution.

c) 1) *Plusieurs réponses possibles. Exemple* :



Le coût d'achat de l'ensemble ne doit pas dépasser 24,75 M$.

2) *Plusieurs réponses possibles. Exemple* :



L'ensemble des bateaux achetés doit permettre le transport d'au moins 880 personnes.

17. a) – Le nombre de turbines solaire ne doit pas dépasser 6.
– Le nombre total de turbines doit être d'au maximum 8.
– Le nombre de turbines au gaz naturel doit être au maximum le double de turbines solaire.
– La somme du nombre de turbines au gaz naturel et du quart du nombre de turbines solaires est au moins 2.

b) 1) 11 chances sur 17 possibilités. **2)** 14 chances sur 17 possibilités. **3)** 4 chances sur 17 possibilités.

SECTION 7.2 Objectif visé et solutions avantageuses

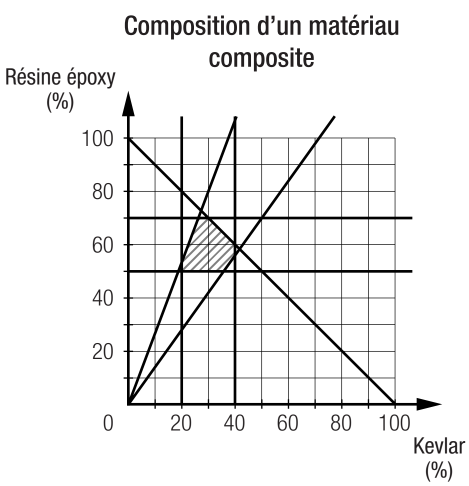
Problème

Page 180

En associant le pourcentage de kevlar à x et le pourcentage de résine époxy à y, nous avons les contraintes suivantes :
$x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \geq 20$, $x \leq 40$, $y \geq 50$, $y \leq 70$, $x + y \leq 100$, $\frac{y}{x} \geq 1,4$ et $\frac{y}{x} \leq 2,7$

La fonction dont la règle est $0,34x + 0,035y = \text{M}$ permet de calculer la rigidité du matériau.

Voici la représentation du polygone de contraintes et des suggestions des techniciens.



Le tableau suivant donne la rigidité des matériaux proposés.

Suggestion	Pourcentage de Kevlar	Pourcentage de résine époxy	Rigidité (GPa)
1	35	63	14,105
2	27	70	11,63
3	39	52	15,08
4	37	53	14,435

À exclure, car les pourcentages ne respectent pas les contraintes.

La suggestion 4 engendre le matériau le plus rigide. En y rajoutant 10 % de résine époxy, on obtient un matériau qui respecte les contraintes et dont la rigidité est de 14,785 GPa.

On peut donc créer un matériau encore plus rigide avec 37 % de kevlar et 63 % de résine époxy.

Activité 1

Page 181

a. **1)** $C = 30x + 18y$

2) Non, car on ne donne pas de consommation minimale ou maximale dans l'énoncé.

b. $x \geq 10 \qquad x + y \geq 40$

$y \geq 0 \qquad x + y \leq 60$

$18\,000x + 26\,000y \leq 1\,400\,000$

$y > \frac{1}{4}(x + y)$

c.

Calcul de la consommation du parc de taxis

Point	Consommation (L/jour)
A(10, 35)	$30 \times 10 + 18 \times 35 = 930$
B(15, 40)	**$30 \times 15 + 18 \times 40 = 1170$**
C(15, 20)	**$30 \times 15 + 18 \times 20 = 810$**
D(25, 30)	**$30 \times 25 + 18 \times 30 = 1290$**
E(30, 15)	**$30 \times 30 + 18 \times 15 = 1170$**
F(39, 13)	**$30 \times 39 + 18 \times 13 = 1404$**
G(45, 15)	**$30 \times 45 + 18 \times 15 = 1620$**

d. **1)** Les points C, F et G ne doivent pas être pris en considération, car ils n'appartiennent pas à l'ensemble-solution.

2) Le point D représente la solution la moins avantageuse, car, parmi tous les couples de points proposés qui font partie de la région-solution, c'est celui qui engendre la plus grande consommation d'essence.

3) Le point A représente la solution la plus avantageuse, car, parmi tous les couples de points proposés qui font partie de la région-solution, c'est celui qui engendre la plus petite consommation d'essence.

Technomath

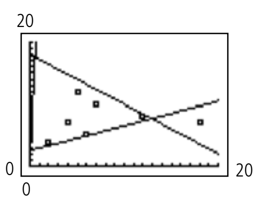
Page 182

a. $y \geq 0{,}5x$, $y \geq 20 - 3x$ et $y \leq 18 - 0{,}5x$.

b. $5x + 3y$

c. **1)** (15, 8) **2)** (5, 6)

d. **1)**



2) **i)** Le couple (12, 8). **ii)** Le couple (2, 4).

Mise au point 7.2

Page 184

1. a)

Couple	$z = 2x - 24y$
(1, 4)	**−94**
(3, 3)	**−66**
(3, 7)	**−162**
(4, 9)	**−208**
(4, 11)	**256 (minimum)**
(5, 2)	**−38 (maximum)**
(7, 3)	**−58**

b)

Couple	$z = 5x + 2y$
(12, 24)	**108 (minimum)**
(16, 16)	**112**
(20, 28)	**156**
(24, 36)	**192**
(28, 20)	**180**
(28, 32)	**204 (maximum)**
(32, 12)	**184**

c)

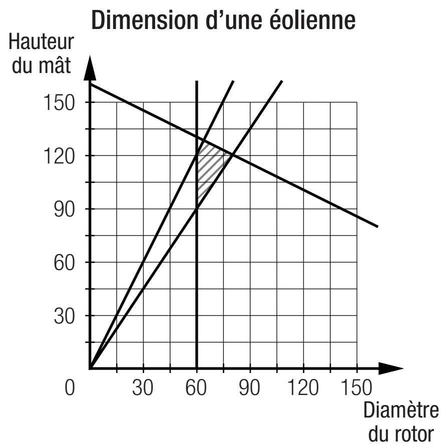
Couple	$z = -x - 4{,}2y + 6$
(20, 20)	**−98 (maximum)**
(20, 70)	**−308**
(30, 40)	**−192**
(50, 60)	**−296**
(60, 30)	**–180**
(70, 20)	**−148**
(80, 70)	**−368 (minimum)**

Mise au point 7.2 (*suite*) **Page 185**

2. a) 1) x : temps (en min) consacré aux nouvelles sportives
y : temps (en min) consacré aux nouvelles nationales
$x \geq 0$, $y > 20$, $19x > y$, $4x < y$, $y \leq 35$ et $x + y \leq 75$.
2) L'objectif visé est de produire un bulletin d'informations au moindre coût.
3) $z = 25x + 15y$

b) 1) x : nombre d'avions du type A produits
y : nombre d'avions du type B produits
$x \geq 0$, $y \geq 0$, $200x + 125y \leq 5000$, $x \geq 5 + 2y$ et $x + y \leq 30$.
2) L'objectif visé est de minimiser le temps de production des avions.
3) $z = 3x + 5y$

3. a)



b) $1500y + 950x = C$

c) 1) La suggestion Ⓓ permet de minimiser le coût de construction.
2) La suggestion Ⓒ permet de maximiser le coût de construction.

Mise au point 7.2 (*suite*) **Page 186**

4. a) $2,7x + 4,5y = P$ **b)** Le point A engendre la plus petite puissance dissipée.

5. a) 1) $z = 12c + 18s$ **2)** $r = 20c + 25s$ **3)** $p = 8c + 7s$

b) 1) Le point D(100, 125), avec des coûts de production de 3450 $.
2) Le point A(75, 250), avec des revenus de 7750 $.
3) Le point C(150, 175), avec des profits de 2425 $.

Mise au point 7.2 (*suite*) **Page 187**

6. a) 1) Le point E. **2)** Le point A.

b) *Plusieurs réponses possibles. Exemple* :
1) $f(x, y) = 3x + 2y$ **2)** $f(x, y) = 2x - 3y$ **3)** $f(x, y) = x + y$

7. a) $x \geq 75\ 000$
$y \geq 25\ 000$
$x \geq 2y$
$5x + 3y \leq 1\ 300\ 000$
$3x + 5y \leq 1\ 000\ 000$

b) 1) La suggestion Ⓓ. **2)** La suggestion Ⓑ.

Mise au point 7.2 (*suite*) **Page 188**

8. a) La production de 5 chaises et 5 tabourets maximise le revenu hebdomadaire de l'artisan.

b) La production de 3 chaises et 8 tabourets maximise le revenu horaire de l'artisan.

9. a)
- Le côté ① est associé à « chaque millier de dollars investis en publicité permet d'augmenter le volume des ventes d'au plus 1200 unités » ;
- Le côté ② est associé à « l'investissement en publicité est d'au plus 60 k$ » ;
- Le côté ③ est associé à « chaque millier de dollars investis en publicité permet d'augmenter le volume des ventes d'au moins 600 unités » ;
- Le côté ④ est associé à « l'investissement en publicité est d'au moins 30 k$ ».

b) 1) Le point D. **2)** Le point D.

c) *Plusieurs réponses possibles. Exemple* : Le prix de vente pourrait être de 11 $.

Mise au point 7.2 (*suite*) **Page 189**

10. a) Le point A.

b) Non. Lorsque l'on compare la valeur de la fonction évaluée au point C avec celle évaluée au point B, on sait que le terme ax augmente (car l'abscisse de C est supérieure à l'abscisse de B) et que le terme by diminue (car l'ordonnée de C est inférieure à l'ordonnée de B). Ne connaissant pas l'ampleur de l'augmentation et de la diminution, on ne peut déduire lequel de ces points engendrera une valeur maximale.

11. a) 1) Le point B. **2)** Le point F.

b) 1) Le point H. **2)** Le point B.

SECTION 7.3 Optimisation à l'aide de la programmation linéaire

Problème **Page 190**

En posant x, la quantité de plastique recyclé (en g), et y, la quantité de plastique neuf (en g), les contraintes de la situation sont :

$x + y \geq 40$, $x + y \leq 60$, $0{,}04x + 0{,}07y \geq 2$, $0{,}04x + 0{,}07y \leq 3$, $y \geq 0{,}15(x + y)$ et $y \leq 0{,}4(x + y)$.

La règle $0{,}9x + 0{,}5y = B$ permet de calculer le bilan carbone de la sandale.

De cette règle, on déduit que :

- plus la masse de la sandale est petite, plus le bilan carbone sera faible. La solution minimale doit donc être située sur le côté du polygone associé à la masse minimale de la sandale, soit sur la droite d'équation $x + y = 40$;
- pour une masse donnée, plus la masse de plastique recyclé est élevée, plus le bilan carbone sera faible, car le plastique recyclé a un plus petit bilan carbone que le plastique neuf. La solution optimale doit donc être située sur le côté du polygone de contrainte associé au pourcentage maximal de plastique recyclé, soit sur la droite d'équation $y = 0{,}4(x + y)$.

On en déduit donc que la solution optimale se trouve à l'intersection des droites d'équation $x + y = 40$ et $y = 0{,}4(x + y)$. Les coordonnées du point d'intersection de ces droites sont (24, 16).

Il faut utiliser 24 g de plastique recyclé et 16 g de plastique neuf.

Activité 1 **Page 191**

a. 1) Les matériaux dont la rigidité et la densité engendrent une vitesse de coupe de 75 m/min.
2) Les matériaux dont la rigidité et la densité engendrent une vitesse de coupe de 50 m/min.
3) Les matériaux dont la rigidité et la densité engendrent une vitesse de coupe de 25 m/min.
4) Les matériaux dont la rigidité et la densité engendrent une vitesse de coupe de 3 m/min.

b. Ce sont les points qui représentent la rigidité et la densité de certains matériaux qui respectent l'ensemble des contraintes et dont la vitesse de coupe est de 25 m/min.

c. $-0{,}1$

d. Lorsque la droite baladeuse se déplace de d_1 vers d_4, la vitesse de coupe de la machine diminue.

e. **1)** Non, car la droite d_3 ne coupe pas le polygone de contraintes.
2) Non, car la droite d_4 ne coupe pas le polygone de contraintes.

f.

Sommet	$100 - 0{,}3x - 3y$	V
A(65, 3,25)	**100 − 0,3 × 65 − 3 × 3,25**	**70,75**
B(210, 10,5)	**100 − 0,3 × 210 − 3 × 10,5**	**5,5**
C(210, 4,2)	**100 − 0,3 × 210 − 3 × 4,2**	**24,4**
D(125, 2,5)	**100 − 0,3 × 125 − 3 × 2,5**	**55**
E(65, 2,5)	**100 − 0,3 × 65 − 3 × 2,5**	**73**

Activité 1 (*suite*)

Page 192

g. **1)** (65, 3,25) **2)** (210, 4,2)

h.

Temps de coupe (s)	$T = 10 - 0{,}02x + y$	$y = \mathbf{0{,}02x + T - 10}$
10	$10 = 10 - 0{,}02x + y$	$d_5 : y = \mathbf{0{,}02x}$
12	$\mathbf{12 = 10 - 0{,}02x + y}$	$d_6 : y = \mathbf{0{,}02x + 2}$
14,5	$\mathbf{14{,}5 = 10 - 0{,}02x + y}$	$d_7 : y = \mathbf{0{,}02x + 4{,}5}$
17	$\mathbf{17 = 10 - 0{,}02x + y}$	$d_8 : y = \mathbf{0{,}02x + 7}$

i. (210, 10,5)

j. Sur le segment de droite DC.

k. **1)** Lorsque les coordonnées d'un seul point engendrent la solution optimale, ce point est généralement un sommet du polygone de contraintes.
2) Lorsque les coordonnées de plusieurs points engendrent la solution optimale, ces points sont généralement situés sur un côté du polygone de contraintes.

Technomath

Page 193

a. Les coordonnées des sommets sont (2, 4), (6, 7) et (8,2).

b. **1)** $z = x + 2y$ **2)** $^{-}0{,}5$ **3)** (6, 7) **4)** (2, 4)

c. *Plusieurs réponses possibles. Cependant, pour n'importe quelle valeur de A saisie, il faut que la valeur de B soit égale à 0,4A. Par exemple, on peut saisir A = 5 et B = 2.*

d. **1)** (6, 7) **2)** (2, 4)

Mise au point 7.3

Page 196

1. a) **1)** B(20, 40) **2)** C(28, 12)
b) **1)** D(40, 30) **2)** Tous les points situés sur le segment BC.
c) **1)** C(3, 3) **2)** A(5, 9)
d) **1)** Tous les points situés sur le segment AB. **2)** C(18, 10)

2. a) Le sommet B. **b)** Le sommet B.

Mise au point 7.3 (*suite*)

Page 197

3. a) ① Le point A. ② Le point E.
b) ① 29 ② 10

4. a) Le point (1, 3) permet d'atteindre l'objectif. **b)** Le point (6, 6) permet d'atteindre l'objectif.

5. a) (80, 30) **b)** (0,27, ⁻4,34) **c)** (17, 3) **d)** (0,9, 0,8)

Mise au point 7.3 (*suite*)

Page 198

6. a) 1) 59 **2)** 15 **b) 1)** 4,02 **2)** 0,18

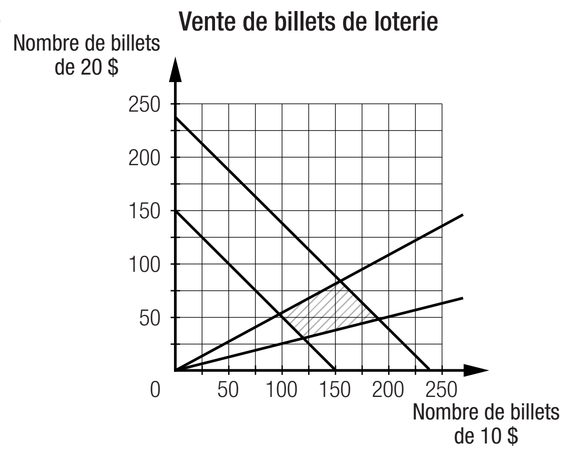
c) 1) 43,5 **2)** 1,5 **d) 1)** 2,8 **2)** ⁻21,8

7. a) x : nombre de billets de 10$ y : nombre de billets de 20$

b) $5x + 10y = M$

c) $x \geq 0$
$y \geq 0$
$x + y \geq 150$
$x + y \leq 240$
$y \geq 0{,}2(x + y)$
$2y \leq x$

d)



e) 160 billets à 10$ et 80 billets à 20$ doivent être vendus. **f)** 1600 $

8. a) (3, 6) **b)** (2, 5)

Mise au point 7.3 (*suite*)

Page 199

9. L'entreprise doit fabriquer 2160 vis et 3360 boulons chaque semaine pour faire un revenu maximal de 936 $.

10. a) 1) $f \geq 0$
$c \geq 0$
$1{,}18f + 2{,}6c + 69{,}1 \geq 75$
$1{,}18f + 2{,}6c + 69{,}1 \leq 100$
$1{,}3c + 47{,}8 \geq 50$
$1{,}3c + 47{,}8 \leq 75$
$12f + 14c + 50 \geq 165$
$12f + 14c + 50 \leq 275$

2) $52f + 81c + 1113 = M$

b) 1) La personne devra consommer environ 7,6 portions de fruits et environ 1,69 portion de produits céréaliers.
2) La personne consommera environ 1645,61 calories.

Mise au point 7.3 (*suite*)

Page 200

11. a) Les coordonnées des sommets du polygone des contraintes sont (500, 500), (≈ 666,67, ≈ 333,33), (1375, 1375), (1875, 1125) et (2000, 1000). Pour maximiser ses revenus, le fabricant devra produire 1875 paquets de 4 piles et 1125 paquets de 8 piles.

b) 1) Sur le côté associé à la droite d'équation $4x + 8y = 16\ 500$
2) *Plusieurs réponses possibles. Exemple* : Produire 1375 paquets de 4 piles et 1375 paquets de 8 piles ou produire 1875 paquets de 4 piles et 1125 paquets de 8 piles.

12. a) 1) 14 mg du médicament A et 21 mg du médicament B. **2)** $z = 0{,}952$

b) 1) 5 comprimés du médicament A et 4 comprimés du médicament B. **2)** $z = 0{,}881\ 25$

Mise au point 7.3 (*suite*) **Page 201**

13. Il faut résoudre le système formé des équations $cx + dy = m$ et $px + qy = n$.

- En isolant y dans la première équation, on obtient $y = ^{-}\frac{cx}{d} + \frac{m}{d}$
- En substituant cette expression à y dans la seconde équation, on obtient :

$$px + q\left(^{-}\frac{cx}{d} + \frac{m}{d}\right) = n$$
$$x\left(p - \frac{qc}{d}\right) = n - \frac{qm}{d}$$
$$x = \frac{dn - qm}{dp - qc}$$

- On en déduit que :

$$y = ^{-}\frac{c}{d}\left(\frac{dn - qm}{dp - qc}\right) + \frac{m}{d} = \frac{^{-}cdn + cmq + dmp - cmq}{d(dp - qc)} = \frac{d(mp - cn)}{d(dp - qc)} = \frac{mp - cn}{dp - qc}$$

- En substituant dans la règle de $f(x, y)$ les expressions trouvées à x et y, on obtient la valeur optimale de $f(x, y)$.

$$f(x, y) = a\left(\frac{dn - qm}{dp - qc}\right) + b\left(\frac{mp - cn}{dp - qc}\right) = \frac{adn - aqm + bmp - bcn}{dp - qc}$$

La valeur optimale de $f(x, y)$ est $\frac{adn - aqm + bmp - bcn}{dp - qc}$.

14. a) La fonction à optimiser est $M = 47x + 65y$. Les coordonnées (40, 40) maximisent les profits. En arrondissant, on obtient un profit de 4480 $.

b) La fonction à optimiser est $M = 13x + 22y$. Les coordonnées ($\approx$ 65,33, 0) minimisent les pertes. L'entreprise devra donc utiliser 65 pièces de bois de format A.

15. a) Les coordonnées des sommets du polygone des contraintes sont (8,5, 2,375), (9, 2,25), (9,2,09) et (8,5, 2,185). La consommation minimale est de 17,928 L/km au sommet (9, 2,09) pour le premier avion et de 19 L/km à tous les points du côté formé par les sommets (9, 2,09) et (8,5, 2,185) pour le deuxième avion. Le premier avion consomme moins de kérosène dans ces conditions.

b) La consommation maximale de carburant est au sommet (8,5, 2,375). À ce sommet, le deuxième avion consomme 19,95 L/km. La quantité maximale de kérosène économisée est donc 19,95 − 17,928, soit 2,022 L/km.

SECTION 7.4 Les systèmes faisant intervenir divers modèles fonctionnels

Problème **Page 202**

Voici les règles qui permettent de calculer le pouvoir convergent des lentilles :

$$C_{gauche} = \frac{1,4 - 1}{R}$$
$$C_{droite} = \frac{1,9 - 1}{R}$$

D'après la prescription, il faut résoudre l'équation suivante :

$$C_{droite} = C_{gauche} + 2,3$$
$$\frac{1,9 - 1}{R} = \frac{1,4 - 1}{R} + 2,3$$
$$\frac{1,9 - 1}{R} = \frac{1,4 - 1}{R} + \frac{2,3R}{R}$$
$$\frac{0,9}{R} = \frac{0,4 + 2,3R}{R}$$
$$0,9R = 0,4R + 2,3R^2$$
$$2,3R^2 - 0,5R = 0$$
$$R(2,3R - 0,5) = 0$$

$R = 0$ m ou $R = \frac{0,5}{2,3}$, soit environ 0,217 m ou 21,7 cm.

Le rayon de courbure des deux lentilles est environ de 21,7 cm. Le pouvoir convergent de la lentille droite est environ de 4,15 dioptries et celui de la lentille gauche est environ de 1,85 dioptrie.

Activité 1

Page 203

a. 1) Résoudre l'équation $6000 + 40x^2 = 4080 + 640x$. Les populations seront égales à 4 ans et 12 ans.
2) 6640 caribous et 6640 wapitis à 4 ans ainsi que 11 760 caribous et 11 760 wapitis à 12 ans

b. La solution correspond au point d'intersection des deux courbes.

c. 1) Environ 3,7 années. **2)** Environ 65 millions de sauterelles et de chenilles.

d. 1) Les deux populations sont égales à environ 3,73 années. **2)** Chaque population est environ de 64,56 millions.

***t* (semaines)**	3,7	3,71	3,72	3,73	3,74	3,75	3,76	3,77	3,78	3,79	3,8
***s* (millions d'individus)**	**≈ 63,6**	**≈ 63,92**	**≈ 64,24**	**≈ 64,56**	**≈ 64,88**	**≈ 65,21**	**≈ 65,54**	**≈ 65,86**	**≈ 66,19**	**≈ 66,53**	**≈ 66,85**
***c* (millions d'individus)**	**≈ 64,6**	**≈ 64,61**	**≈ 64,62**	**≈ 64,64**	**≈ 64,65**	**≈ 64,67**	**≈ 64,68**	**≈ 64,69**	**≈ 64,71**	**≈ 64,72**	**≈ 64,73**

Activité 1 (*suite*)

Page 204

e. 1) Les régions B, C, E et F. **2)** Les régions A, B, D et E. **3)** Les régions D, E, F et G .

f. La région E.

g. Le point (4, 108) constitue un couple-solution, car les deux courbes frontières auxquelles appartient ce point font partie de l'ensemble-solution, tandis que les points (4, 225) et (25, 412,5) ne constituent pas des couples-solution, car l'une des courbes frontières auxquelles appartiennent ces points ne fait pas partie de l'ensemble-solution.

Technomath

Page 205

a. Il y a 3 points d'intersection entre les 2 courbes.

b. $(\approx -3{,}07, \approx -4)$

c. $(1{,}2, \approx -3{,}24)$

d. 1) $(\approx -1{,}16, \approx -3{,}74)$ **2)** $(\approx 3{,}5, \approx 7{,}17)$

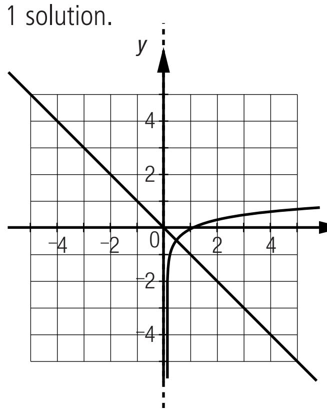
Mise au point 7.4

Page 207

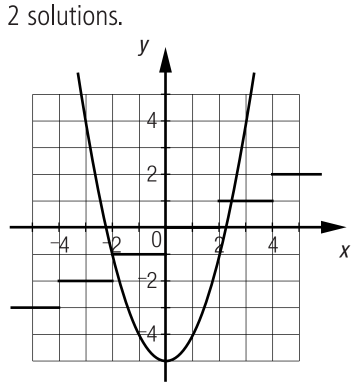
1. a) (0, 0) et (4, 16). **b)** $(\approx 1{,}73, \approx 1{,}27)$
c) $(\approx -24{,}36, \approx 5{,}18)$ et $(\approx -1{,}64, \approx -6{,}18)$. **d)** $(\approx -8{,}45, \approx 3{,}09 \times 10^{-5})$

2. a) 1) 1 solution. **2)** $(\approx 3{,}4, 2{,}8)$
b) 1) 1 solution. **2)** Le système d'équations est : $y = 3(0{,}5)^{x-2}$, $y = 2\ln(3x - 1)$ $(\approx 1{,}9, \approx 3{,}1)$
c) 1) 2 solutions. **2)** Le système d'équations est : $y = 1{,}5\log(x + 2)$, $y = 0{,}5x^2 - 4$ $(\approx -2, \approx -2{,}1)$ et $(\approx 3{,}1, \approx 1)$.
d) 1) 2 solutions. **2)** Le système d'équations est : $y = \frac{0{,}5}{x-3} + 3$, $y = 5\log(2x + 2)$ $(\approx 2{,}4, \approx 2{,}2)$ et $(\approx 3{,}7, \approx 3{,}7)$.

3. a) 1) 1 solution.

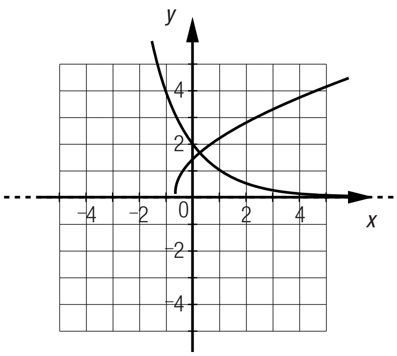


b) 1) 2 solutions.



2) ($\approx 0{,}4$, $\approx -0{,}4$)

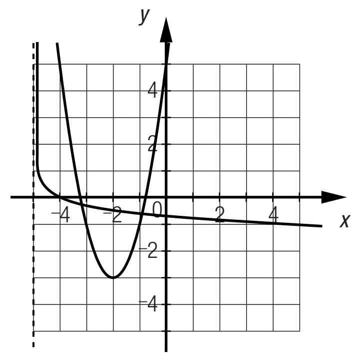
c) 1) 1 solution.



2) ($\approx 0{,}3$, $\approx 1{,}7$)

2) ($\approx 2{,}5$, 1) et (-2, -1).

d) 1) 2 solutions.



2) ($\approx -3{,}2$, $-0{,}3$) et ($\approx -0{,}9$, $\approx -0{,}6$).

Mise au point 7.4 (*suite*) **Page 208**

4. a) ($\approx 1{,}8$, $\approx 0{,}6$) et ($\approx 4{,}6$, $\approx 1{,}5$). **b)** ($\approx 3{,}7$, $1{,}6$)

5. a) $y \leq -x^2$
$y > -2(0{,}8)^x$

b) $y > \frac{1}{x}$
$y \leq 2^x$

c) $y \geq x - 1$
$y \leq [x]$

d) $y \leq \log (x + 2) + 4$
$y \geq 1{,}5\sqrt{x + 3} + 1$

6. a) 1) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $y = 2^{-x}$ et $y = \log (-x + 3) + 1$.

2) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* $y = 2^{-x}$ et $y = \log (-x)$.

b) Oui, à condition que les deux courbes soient tangentes l'une à l'autre.

Mise au point 7.4 (*suite*) **Page 209**

7. a) 1) Les régions E et F. **2)** Les régions C, G et I. **3)** La région A. **4)** La région H.

b) 1) $y \leq -x^2 - x + 3$
$y \geq x^2 - x - 1{,}5$
$y < x$

2) $y \leq -x^2 - x + 3$
$y \leq x^2 - x - 1{,}5$
$y > x$

3) $y \geq -x^2 - x + 3$
$y \leq x^2 - x - 1{,}5$
$y > x$

4) $y \leq -x^2 - x + 3$
$y < x$

8. Aucun de ces élèves n'a raison. En redéfinissant les paramètres d'affichage de la fenêtre graphique, on observe quatre points d'intersection entre ces deux fonctions. Il y a donc quatre solutions.

9. a) (2, 0) **b)** (2,2, 0,4) **c)** (2,21, 4,45)

Mise au point 7.4 (*suite*) **Page 210**

10. a) Les arbres **A** et **B** auront la même taille après environ 13,8 années.

b) Les arbres **A** et **C** auront la même taille après environ 8 années.

c) Les arbres **B** et **C** auront la même taille après environ 11 années.

11. a) La région G.

b) $d \geq 20$
$m - 5\log d + 5 \leq 0$
$m - 5\log d + 5 \geq -10$

c) Ces étoiles sont situées à moins de 4 parsecs et leur magnitude absolue est supérieure à 10.

12. Il faut résoudre l'équation $50(0{,}5)^{\frac{t}{24}} = 100(0{,}5)^{\frac{t}{5{,}7}}$.
Les échantillons auront la même masse dans environ 7,48 milliers d'années.

Mise au point 7.4 (*suite*)

Page 211

13. a) 1) Il faut résoudre graphiquement l'équation $\frac{25\,000}{p} = 40(1{,}01)^{p\,-\,150}$.
Le prix d'équilibre est environ de 245 \$.

2) La quantité d'équilibre est environ de 100 milliers de lecteurs.

b) 1) Le prix d'équilibre augmente d'environ 50 \$.

2) La quantité d'équilibre diminue d'environ 20 milliers de lecteurs.

Mise au point 7.4 (*suite*)

Page 212

14. a) $y \leq {}^{-}\frac{10}{x+3} + 3$
$y \leq \ln {}^{-}(x - 5) + 3$
$y \geq 0{,}5x^2 - 2x + 1$

b) A($\approx$ 2,2, $\approx$ 4,1), B($\approx$ 4,5, $\approx$ 2,3) et C($\approx$ ⁻0,5, $\approx$ 2).

c) 1) ($\approx$ 3,4, $\approx$ 3,4) **2)** $f(x, y) \approx 17$

15. a) Elles représentent les moments où les planètes A et B sont à la même distance de leur étoile.

b) Le système comporte une infinité de solutions, car les deux courbes se croisent de façon périodique, ce qui engendre une infinité de points d'intersection.

c) *Plusieurs réponses possibles. Exemple :* ($\approx$ 8, $\approx$ 198,5) et ($\approx$ 14, $\approx$ 201,4).

d) 1) Environ 6 ans. **2)** Environ 14 ans.

SECTION 7.5 Optimisation de figures équivalentes

Problème

Page 213

Le graphique permet de déduire que, pour un périmètre donné :

- l'aire maximale du rectangle est associée au sommet de la parabole ;
- la hauteur du rectangle de plus grande aire correspond à l'abscisse du sommet ;
- l'abscisse du sommet est située à mi-chemin entre les deux zéros de la parabole.

La démarche ci-dessous permet de trouver les zéros de la parabole d'équation $A = {}^{-}h^2 + \frac{Ph}{2}$.

${}^{-}h^2 + \frac{Ph}{2} = 0$

$h\left(\frac{P}{2} - h\right) = 0$

$h = 0$ ou $h = \frac{P}{2}$.

L'abscisse du sommet est donc $\frac{1}{2}\left(\frac{P}{2} - 0\right)$, soit $\frac{P}{4}$.

Le seul rectangle dont la hauteur est égale au quart de son périmètre est un carré.

Activité 1

Page 214

a. Aire de l'aile rose $= \frac{(1{,}5 + 0{,}5) \times 3}{2} = 3\text{ m}^2$

Aire de l'aile orange $= \frac{(1{,}5 + 0{,}5) \times 3}{2} = 3\text{ m}^2$

b. Non. Par exemple, les côtés non parallèles du trapèze rouge sont plus courts que les côtés non parallèles du côté orange. Puisque ces deux trapèzes ont des bases isométriques, leur périmètre est différent bien qu'ils aient la même aire.

c. Périmètre de l'aile orange = 3,9 + 0,5 + 3,3 + 1,5 = 9,2 m

Périmètre de l'aile verte = 2,4 + 1,5 + 1,5 + 3,8 = 9,2 m

d. Non. Par exemple, le trapèze orange a le même périmètre que le triangle vert. Pourtant, l'aire du triangle vaut $\frac{2{,}4 \times 3}{2}$, soit 3,6 m^2, ce qui est plus élevé que l'aire du trapèze.

Activité 1 (*suite*)

Page 215

e. Les deux configurations ont la même aire totale, soit 160 cm^2.

f. Non. Le prisme régulier a un volume de 128 cm^3, tandis que la pyramide a un volume d'environ 118,5 cm^3.

g. Les deux configurations ont le même volume, soit $\frac{3200}{27}$ cm^3.

h. Non. La pyramide régulière a une aire de 160 cm^2 tandis que le prisme droit a une aire d'environ 171,85 cm^2.

Activité 2

Page 216

a. L'aire de chacun des triangles est de $9\sqrt{3}$ cm^2.

b. Le triangle C.

c. **1)** Les dimensions de ce rectangle sont de 3 cm par 12 cm.
2) Les dimensions de ce rectangle sont de 2 cm par 18 cm.

d. Le périmètre diminue.

e. Non, car, graphiquement, il n'y a aucun point d'intersection.

f. Les dimensions du rectangle sont de 6 cm par 6 cm. Le rectangle est donc un carré.

g. Parmi tous les polygones qui possèdent la même aire et le même nombre de côtés, le polygone régulier est celui qui possède le plus petit périmètre.

Activité 2 (*suite*)

Page 217

h. 20 cm^2

i. **1)** De tous les polygones réguliers équivalents, c'est le polygone ayant le plus grand nombre de côtés qui a le plus petit périmètre.
2) Cette suite de polygones tend vers un cercle.

j. $\approx$ 15,85 cm

k. Ces polygones ont tous un volume de 216 cm^3.

l. A : 246 cm^2 ; B : 252 cm^2 ; C : 228 cm^2 ; D : 312 cm^2 ; E : 216 cm^2.

m. De tous les prismes droits à base rectangulaire équivalents, c'est le cube qui a la plus petite aire.

Activité 2 (*suite*)

Page 218

n. 216 cm^3

o. **1)** Plus le nombre de faces est grand, plus l'aire totale est petite. **2)** Cette suite de polyèdres tend vers une boule.

p. $\approx$ 174,10 cm^2

q. Tous ces solides ont une aire totale de 216 cm^2.

r. **1)** Le volume augmente. **2)** Cette suite de polyèdres tend vers une boule.

s. $\approx$ 298,51 cm^3

Technomath

Page 219

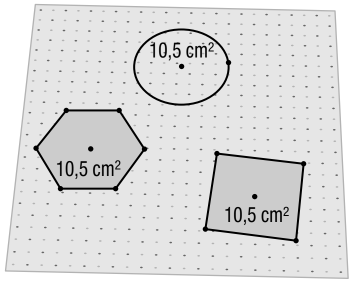
a. **1)** $\approx$ 5,38 cm **2)** $\approx$ 6,07 cm **3)** Le carré, le cercle et le triangle.

b. **1)** $\approx 13{,}83\ \text{cm}^2$

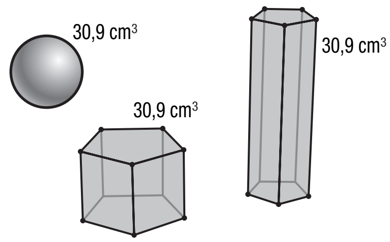
2) Le cylindre circulaire droit et le prisme droit à base triangulaire ont le même volume. Le prisme droit à base pentagonale et le prisme droit à base octogonale ont le même volume.

3) Le cylindre circulaire droit et le prisme droit à base triangulaire.

c. **1)**



2)



Mise au point 7.5

Page 224

1. A F, C D, E J

Mise au point 7.5 (*suite*)

Page 225

2. a) F, D, H, B, C, I, G, A, E

b) E, A, G, I, C, B, H, D, F

3. A, E, C, D, F, B

Mise au point 7.5 (*suite*)

Page 226

4. Le lot 3, puisqu'il a 5 côtés et qu'il s'agit d'un polygone régulier.

5. a) L'emballage **B.**

b) Il faut disposer les dés de façon à ce qu'ils forment un cube.

6. a) Le cercle.

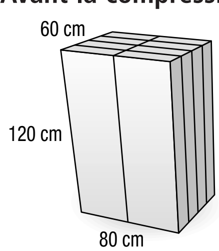
b) L'aire de ce territoire est de $\frac{4}{\pi}$ km^2

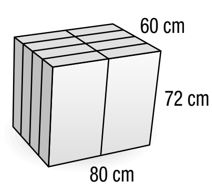
Mise au point 7.5 (*suite*)

Page 227

7. Il faut disposer les morceaux de façon à ce que le prisme formé se rapproche le plus possible d'un cube une fois compressé.

Avant la compression **Après la compression**





L'aire de la plus petite feuille de polyéthylène est environ de 29 760 cm^2.

8. a) **1)** Disposition 4×6, disposition 3×8, disposition 2×12 et disposition 1×24.

2) Il n'y a pas de différence entre ces dispositions au niveau de l'espace perdu. L'espace perdu est le même dans chaque cas, soit environ 3625,91 cm^3.

b) Disposition 4×6, disposition 3×8, disposition 2×12 et disposition 1×24.

9. a) Aire $= 6r^2\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3}}$ **b)** Aire $= \frac{14\pi r^2}{3}$ **c)** Volume $= c^3\sqrt{\frac{6}{\pi}}$

d) Afin de trouver une expression pour le rayon du cylindre en fonction du côté du cube, il faut résoudre l'équation $2\pi r^2 + 2\pi rc = 6c^2$. On trouve ensuite que le volume du cylindre est $\frac{4\pi r^2}{3}(\sqrt{3\pi^2 + 12\pi} - \pi)^2$

Mise au point 7.5 (*suite*)

Page 228

10. a) Le format **C,** puisque les trois formats de contenants ont la même hauteur et la même capacité, l'aire de chaque base est égale. De toutes les figures planes équivalentes, c'est le disque qui a le plus petit périmètre, qui est ici la base du contenant de format **C.** L'aire latérale du format **C** sera plus petite que celles des autres formats.

b) Le format **C.** Puisque de toutes les figures planes de même périmètre, c'est le disque qui a la plus grande aire, et que les trois formats de contenants ont la même hauteur, le format **C** aura un plus grand volume.

c) Le format **C.** Puisque de toutes les figures planes équivalentes, c'est le disque qui a le plus petit périmètre, et puisque l'aire latérale est la même pour tous les formats, le format **C** aura la plus grande hauteur, et donc, le plus grand volume.

11. a) La confiserie peut fabriquer 400 000 petits chocolats.

b) 1) On utilise environ 1,41 mL de bonbon. **2)** On utilise environ 1,28 mL de bonbon.
3) On utilise environ 1,03 mL de bonbon.

c) 1) La confiserie économise 380 $. **2)** La confiserie économise 250 $.

Mise au point 7.5 (*suite*)

Page 229

12. a) La réaction 3, car, lorsqu'on compare les solides deux par deux avec ceux de la réaction 1 et de la réaction 2, ceux de la réaction 3 ont toujours une aire plus grande.

b) La réaction 2, car, lorsqu'on compare les solides deux par deux avec ceux de la réaction 1, ceux de la réaction 2 ont toujours une aire plus petite.

13. Les coûts d'étiquetage dépendent de l'aire de l'étiquette à produire, qui est égale à l'aire latérale de la pile.
Les aires latérales de chacun des modèles sont les suivantes.

A : 90 cm^2 ; **B :** $\approx$ 184,27 cm^2 ; **C :** $\approx$ 131,45 cm^2 ; **D** : $\approx$ 116,5 cm^2

C'est donc le format **A** qui coûte le moins cher à étiqueter.

RUBRIQUES PARTICULIÈRES 7

Chronique du passé

Page 231

1. a) 2500 fantassins et 1000 artilleurs. **b)** En 9 jours.
c) 15 jours. **d)** 2500 fantassins et 2500 artilleurs.

2. a) $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $z \geq 0$ **b) 1)** A(0, 750, 375) **2)** C(0, 0, 750) **3)** D(375, 0, 375)

Le monde du travail

Page 233

1. Si le nombre de boîtes de type A et B sont respectivement représentées par les variables x et y, le système d'inéquations associé à cette situation est :

$x \geq 0$
$y \geq 0$
$0{,}05x + 0{,}08y \leq 36$
$3x + 2y \leq 1600$

La règle de la fonction à optimiser est $V = 50x + 70y$.

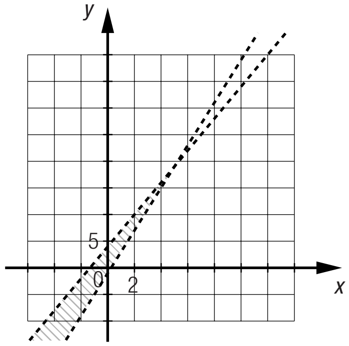
Les coordonnées du point qui maximise la fonction à optimiser sont (400, 200).

Il faudra mettre dans le camion 400 boîtes de type A et 200 boîtes de type B.

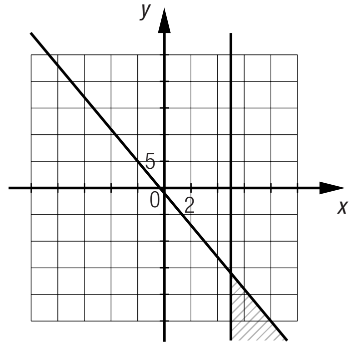
2. Après avoir percé le trou à l'origine, la perceuse devra percer les trois autres trous dans cet ordre : (⁻4, 2), (3, 3) et (4, ⁻1).

Vue d'ensemble

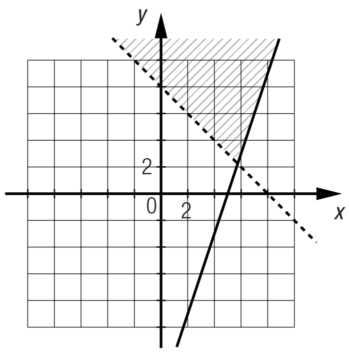
1. a)



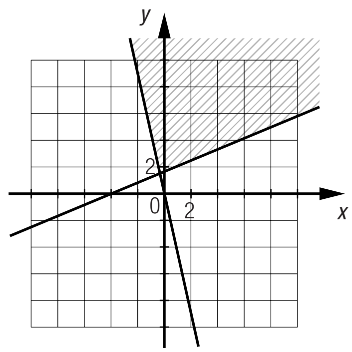
b)



c)



d)



2. a) A(−1, −6) et C(3, 4). **b)** A(−1, −6) et E(1, −16). **c)** A(−1, −6)

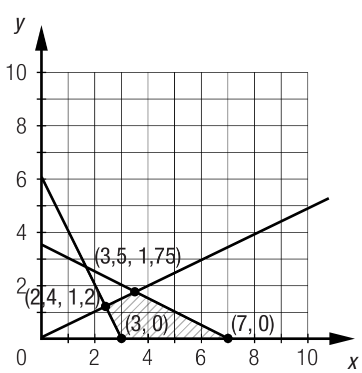
3. a) 1) x : nombre de chaises
y : nombre de tabourets en bois
$x \geq 150$, $y \geq 100$, $x \geq 2y$ et $x + y \leq 1000$.

2) $z = 20x + 12y$

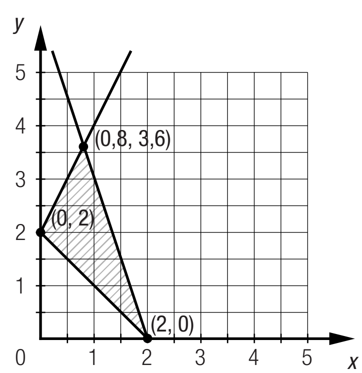
b) 1) x : nombre d'employés à temps partiel
y : nombre d'employés à temps plein
$x \geq 0$, $y \geq 0$, $14x + 30y \geq 400$, et $x + y \leq 14$.

2) $z = 12x + 14y$

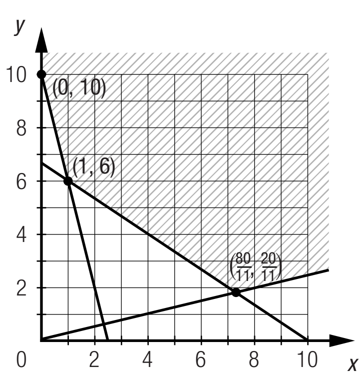
4. a)



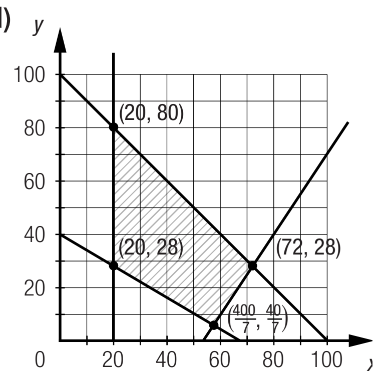
b)



c)



d)



Vue d'ensemble (*suite*)

5. a) 1) $x - y \leq {}^-2$, $y \leq {}^-2x + 20$, $4y \geq x - 4$ et $x + 2y > 10$. **2)** $D\left(\frac{28}{3}, \frac{4}{3}\right)$ **3)** C(6, 8) et $D\left(\frac{28}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

b) 1) $3x - y > 0$, $y \leq 18$, $y < {}^-x + 30$, ${}^-2x + y \geq {}^-24$ et $x + 6y \geq 38$. **2)** D(14, 4) **3)** D(14, 4)

6.

Système d'inéquations traduisant les contraintes	$y \leq {}^-x + 15$ $y \leq 2x - 6$ ${}^-x + 3y \geq {}^-60$	$x \geq 0$ $x \geq 0$ $y \leq 15$ $x \leq 14$ $y \leq 2x + 4$	$y \geq {}^-x - 2$ $y \leq x + 4$ $y \leq {}^-3x + 8$
Règle de la fonction à optimiser	$z = 0{,}5x + 2y$	$z = y - 3x$	$z = {}^-10x - 14y$
Objectif visé	Maximiser	Minimiser	Maximiser
Solution	**(7, 8)**	**(14, 0)**	**(5, ⁻7)**
Valeur optimale	**19,5**	**⁻42**	**48**

7. a) 1) B(6, 9) **2)** 24
b) 1) D(8, 1) **2)** 26
c) 1) B(6, 9) **2)** 18,45
d) 1) C(8, 7) **2)** 24,2

Vue d'ensemble (*suite*)

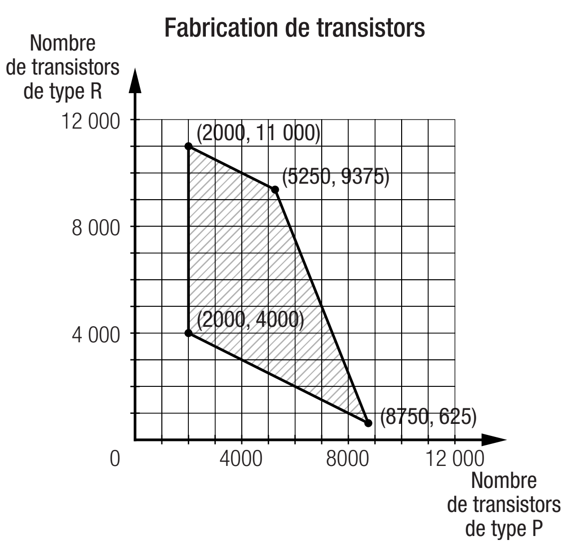
8. On devra remplir 28 bouteilles de 5 mL et 55 bouteilles de 4 mL.

9. a) x : nombre de transistors de type P
y : nombre de transistors de type R

b) $0{,}05x + 0{,}05y = M$

c) $x \geq 2000$
$x + 2y \geq 10\,000$
$x + 2y \leq 24\,000$
$0{,}0025x + 0{,}001y \leq 22{,}5$

d)



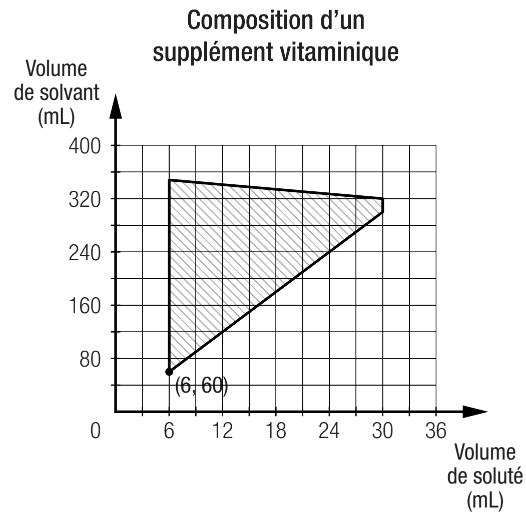
e) Il faut fabriquer 5250 transistors de type P et 9375 transistors de type R.

f) La valeur optimale est 731,25 $.

Vue d'ensemble (*suite*)

10. 25 000 petites billes et 5000 grosses billes pourront être fabriquées.

11. Voici le polygone de contraintes associé à cette situation.



Le coût minimal pour la fabrication du supplément est de 6,90 $.

12. On peut y placer 65 cubes (35 cubes de métal et 30 cubes en bois).

13. **a)** 21 600 $ **b)** ≈ 14 270,77 $ **c)** ≈ 21 326,94 $ **d)** ≈ 15 550,99 $

Vue d'ensemble (*suite*) **Page 238**

14. **a)** Les deux populations seront égales au bout d'environ 7,23 heures.

b) Chaque culture comptera environ 36,72 milliers de bactéries.

15. **a)** Non, car il n'y a aucun point d'intersection entre les deux courbes.

b) $h = \frac{3}{\pi r^2}$ et $h = \frac{15}{2\pi r} - r$.

c) (≈ 0,43, ≈ 5,06) et (≈ 1,28, ≈ 0,58).

d) **1)** Le cylindre a un rayon d'environ 0,84 cm et un rayon d'environ 2 cm.

2) Le cylindre a un volume maximal d'environ 4,43 cm^3.

Vue d'ensemble (*suite*) **Page 239**

16. **a)** $y \geq 0{,}5x^2 - 4x + 6$
$y \leq 0{,}8^{x-5} + 3$
$y \leq 0{,}5e^{x-2} - 2$

b) **1)** (≈ 4,5, ≈ 4,1)
2) (≈ 3,8, ≈ −1,8)

c) **1)** ≈ 4,75
2) ≈ −1,22

17. **a)** Triangle : $q \approx 0{,}61$ Carré : $q \approx 0{,}79$ Pentagone : $q \approx 0{,}86$
Hexagone : $q \approx 0{,}91$ Décagone: $q \approx 0{,}97$

b) C'est le dodécagone, car pour deux polygones réguliers ayant le même périmètre, c'est le polygone ayant le plus de côtés qui a la plus grande aire. Le quotient isopérimétrique sera donc plus grand puisque, pour un même dénominateur, le numérateur sera plus grand.

c) Puisque, pour un même périmètre, c'est le cercle qui a la plus grande aire, on en déduit que le cercle a le plus grand quotient isopérimétrique. Or, pour le cercle, $a = \pi r^2$, $p = 2\pi r$ et $q = \frac{4\pi(\pi r^2)}{(2\pi r)^2} = \frac{4\pi^2 r^2}{4\pi^2 r^2} = 1$.

Vue d'ensemble (*suite*) **Page 240**

18. **a)** ≈ 3,42 cm **b)** ≈ 15,49 dm **c)** = 9 cm **d)** $= \frac{4r}{3}$

19. **a)** Le segment AB mesure environ 4,64 cm. **b)** Le volume d'air est d'environ 5793,76 cm^3.

c) Non, puisque sa circonférence est d'environ 70,01 cm.

Vue d'ensemble (*suite*)

Page 241

20. $A = 6r^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$

21. *Note : Voici des renseignements concernant la production quotidienne de ce fabricant :*

- *au moins 20 génératrices de chaque type sont produites;*
- *le nombre de génératrices industrielles produites est inférieur ou égal au nombre de génératrices commerciales produites, augmenté de 20;*
- *le double du nombre de génératrices commerciales produites est inférieur ou égal à 40 de plus que le nombre de génératrices industrielles produites.*

Les sommets du polygone de contraintes sont (20, 20), (20, 30), (40, 20) et (80, 60).
Le fabricant devra produire 80 génératrices industrielles et 60 génératrices commerciales.

22. Tous les couples de nombres entiers vérifiant l'équation $x + y = 100$ où $x \in [75, 90]$ et $y \in [10, 25]$ minimiseront les coûts liés à la rémunération des participants.

Banque de problèmes

Page 242

1. L'aire du carré de la figure ① est c^2, où c représente la mesure d'un côté du carré.

L'aire du cercle de la figure ① est alors $\frac{\pi c^2}{4}$.

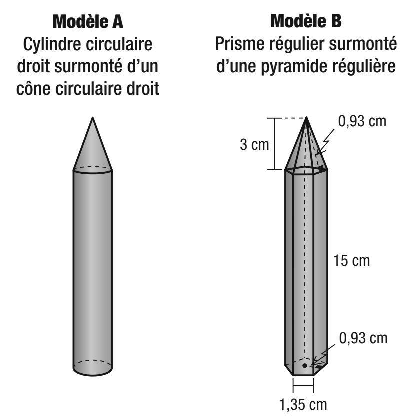
Puisque le carré de la figure ① est équivalent au disque de la figure ②, le rayon du cercle de la figure ② est $\frac{c}{\sqrt{\pi}}$.
Cette mesure correspond également à la demi-diagonale du carré de la figure ②.

Le côté de ce carré mesure donc $c\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. L'aire du carré de la figure ② est $\frac{2c^2}{\pi}$.

Le cercle de la figure ① n'est donc pas équivalent au carré de la figure ②.

2. *Note : Voici des renseignements au sujet des piquets de métal :*

- *Le cylindre est équivalent au prisme et le cône est équivalent à la pyramide.*
- *Le cylindre est de la même hauteur que le prisme et le cône est de la même hauteur que la pyramide.*
- *Le métal utilisé pour la fabrication des piquets coûte 2000 \$/m^3 et chacun doit être recouvert d'une couche de peinture antirouille au coût de 25 \$/m^2.*



1) Aire, volume et coût de fabrication des piquets

L'aire totale d'un piquet **B** est environ de 114,99 cm^2.

Le volume d'un piquet **B** est environ de 50,22 cm^3.

Puisque le cylindre a la même hauteur et le même volume que le prisme et puisque le cône a la même hauteur et le même volume que la pyramide, on en déduit que :

- le disque est équivalent au pentagone;
- le rayon du disque mesure environ 1 cm;
- l'apothème du cône mesure environ 3,16 cm;
- l'aire totale d'un piquet **A** est environ 107,42 cm^2.

Le coût de fabrication :

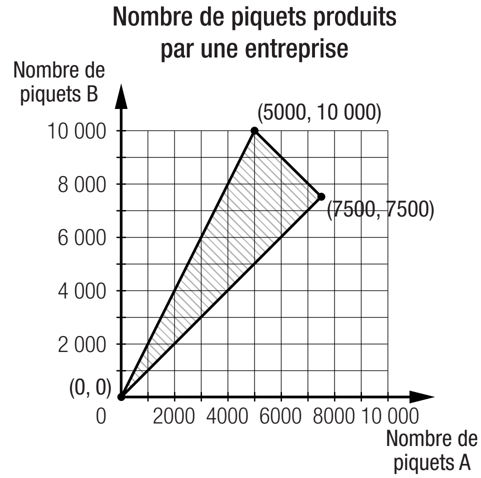
- d'un piquet **A** est environ 0,37 $;
- d'un piquet **B** est environ 0,39 $.

2) Optimisation de la situation

Le profit engendré par la vente d'un piquet **A** est de 1,13 $ et celui engendré par la vente d'un piquet **B** est de 1,61 $.

Si x représente le nombre de piquets **A** et y, le nombre de piquets **B,** la règle de la fonction à optimiser est
$P = 1{,}13x + 1{,}61y$, où P est le profit total (en $).

Voici le polygone de contraintes :



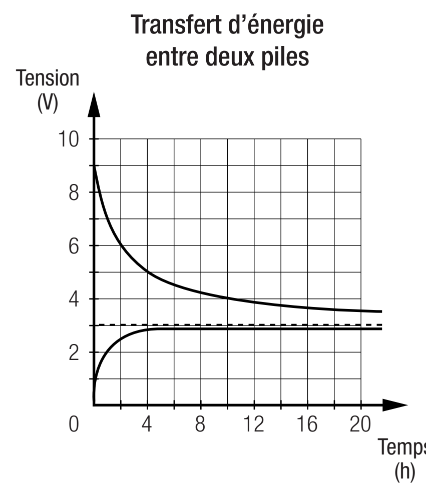
Puisque les coordonnées (7500, 7500) maximisent la fonction, l'entreprise doit produire chaque semaine 7500 piquets de chaque modèle.

Banque de problèmes (*suite*) **Page 243**

3. L'aire de la sphère est $4\pi r^2$.

La base du cylindre a le même rayon que la sphère et sa hauteur est de $2r$. Donc l'aire latérale du cylindre est de $2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$. Puisque l'aire de la sphère et l'aire latérale du cylindre sont égales, la projection décrite est une projection équivalente.

4. En observant la représentation graphique et les règles de chacune des courbes, on remarque que les courbes ne se croisent pas et qu'elles ont une asymptote commune à $y = 3$. C'est donc dire que l'énergie dans chacune des piles se rapprochera de plus en plus de 3V, sans jamais atteindre cette valeur.



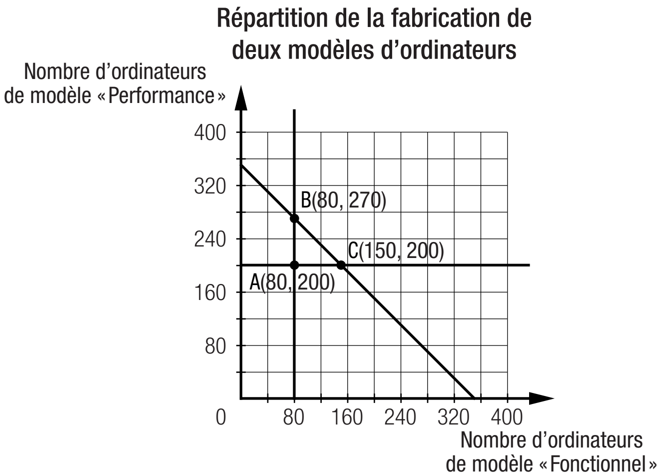
Banque de problèmes (*suite*) **Page 244**

5. Soit x le nombre d'ordinateurs de modèle « Performance », et y le nombre d'ordinateurs de modèle « Fonctionnel », les contraintes sont :

$x \geq 80$
$y \geq 200$
$x + y \leq 350$

Les revenus peuvent être calculés à l'aide de la règle $1000x + 850y = \text{R}$.

Les profits peuvent être calculés à l'aide de la règle $(1000 - c_1)x + (850 - c_2)y = \text{M}$.



Les coordonnées des sommets du polygone de contraintes sont A(80, 200), B(80, 270) et C(150, 200).

Le sommet du polygone de contrainte dont les coordonnées maximisent les revenus est C(150, 200).

Sommets	Revenus
A(80, 200)	250 000$
B(80, 270)	309 500$
C(150, 200)	320 000$

Pour que les profits y soient maximaux au point C par rapport au point B, nous devons avoir :

$150(1000 - c_1) + 200(850 - c_2) > 80(1000 - c_1) + 270(850 - c_2)$

$150(1000 - c_1) - 80(1000 - c_1) > 270(850 - c_2) - 200(850 - c_2)$

$70(1000 - c_1) > 70(850 - c_2)$

$1000 - c_1 > 850 - c_2$

$c_1 < 150 + c_2$

6. Volume $= \frac{4}{3}\pi(75)(25)^2 \approx 196\ 349{,}5408$ m^3

Aire $= 2\pi(75)^2 + 2\pi(75)(25)\dfrac{\arcsin\sqrt{\frac{75^2 - 25^2}{75^2}}}{\sqrt{\frac{75^2 - 25^2}{75^2}}} \approx 53\ 848{,}43$ m^2

Puisque, de tous les solides équivalents, c'est la sphère qui a la plus petite aire, on cherche à ce que la forme de l'ellipsoïde se rapproche plus de celle d'une sphère. On peut donc diminuer la valeur du paramètre a ou augmenter celle du paramètre b et déterminer ensuite la valeur de l'autre paramètre.

Posons a = 70.

$\frac{4}{3}\pi(70)b^2 \approx 196\ 349{,}5408$ m^3

$\Rightarrow$ b $\approx$ 45,87 m.

L'aire du nouveau dirigeable est de 40 874,200 36 m^2.

Les valeurs des paramètres d'un nouveau dirigeable pourraient être :

a = 70m et b $\approx$ 45,87m.

Banque de problèmes (*suite*)

Page 245

7. L'aire de la spirale d'Archimède est de $\frac{\pi}{3}$ cm^2.

L'aire de la spirale de gauche en fonction de la mesure du côté c du carré est :

$c^2 + \frac{\pi(4c)^2}{4} + \frac{\pi(5c)^2}{4} + \frac{\pi(6c)^2}{4} + \frac{\pi(7c)^2}{4} = c^2 + \frac{126\pi c^2}{4} = \frac{126\pi + 4}{4}c^2$

Étant donné que les aires des spirales sont équivalentes, on a :

$\frac{126\pi + 4}{4}c^2 = \frac{\pi}{3}$

$c^2 = \frac{4\pi}{378\pi + 12}$

Le côté du carré doit mesurer $\sqrt{\frac{4\pi}{378\pi + 12}}$ cm, soit environ 0,102 cm.

8. Voici la traduction en contexte des contraintes :

$x \leq 350$	La page ne doit pas contenir plus de 350 mots.
$y \geq 10$	La page doit contenir au moins 10 éléments graphiques.
$y \geq 0{,}05x$ ou $y \geq \frac{1}{20}$	La page doit contenir au moins un élément graphique par tranche de 20 mots.
$x + 10y \leq 750$ ou $0{,}02x + 0{,}2y \leq 15$	Le temps de chargement de la page ne doit pas dépasser 15 secondes.
$x + y \geq 160$	La page doit contenir au moins 160 mots ou éléments graphiques.

Puisque le point dont les coordonnées sont (350, 40) engendrent un maximum de la fonction donnée par $N = 13x + 15y$, on en déduit que l'objectif est de maximiser le nombre d'internautes qui visitent quotidiennement le site Web.