

# L'OPTIMISATION ( MANUEL 2 – VISION 7 )

---

## COURS 1

1- PRÉSENTATION PAR L'ENSEIGNANT DU CHAPITRE DE L'OPTIMISATION

2- THÉORIE : ÉQUATION ET INÉQUATIONS

Qu'est-ce qu'une équation et une inéquation

Comment les représenter graphiquement (Demi-plan ouvert et fermé)

Comment les résoudre algébriquement

Lectures complémentaires:

Demi-plan : P.151 de votre manuel au bas de la page

Comment représenter graphiquement une inéquation : P.152

3- EXERCICES

Mise à jour p.154 nos : 2, 3, 6

**IMPORTANT : Vous avez un premier quizz au prochain cours sur la représentation graphique d'une équation (droite).**

## COURS 2

1- QUIZZ PORTANT SUR LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE ÉQUATION

2- PRÉSENTATION DE LA SAÉ À RÉSOUDRE EN ÉQUIPE ( CD2 )

3- LA MÉTHODE D'OPTIMISATION

Résoudre un problème d'optimisation par essais et erreurs prendrait plusieurs heures et ne vous assurerait en rien de l'exactitude de votre réponse. Ce chapitre a pour but de vous montrer, étape par étape, une méthode qui permet d'optimiser rapidement une situation à deux variables.

Cette méthode comporte plusieurs étapes à effectuer une à la suite de l'autre. Elle vous permettra de trouver la bonne combinaison de variables, celle qui en tenant compte de vos contraintes, vous assurera un maximum de profits ou vous permettra de minimiser vos coûts d'opération. Voici, en résumé, les huit étapes de cette démarche que vous apprendrez durant les prochains cours. Présentement, il est normal que vous ne compreniez pas le sens de toutes ces étapes.

#### Étapes de la méthode d'optimisation :

- 1) Identifier les deux variables à optimiser
- 2) Traduire vos contraintes sous forme d'inéquations dans un graphique
- 3) Identifier la zone contenant toutes les possibilités rattachées à votre situation, ce qu'on appelle le polygone de contraintes.
- 4) Trouver les sommets de votre polygone de contraintes, se sont vos minimum ou maximum possible.
- 5) Construire la règle à optimiser
- 6) Tester les sommets du polygone dans la règle à optimiser
- 7) Identifier le sommet qui vous donne la valeur minimum ou maximum donnée par votre règle à optimiser
- 8) Vérifier votre réponse par la droite baladeuse.

Les cinq premiers cours du chapitre t'amèneront à maîtriser graduellement chacune de ces étapes afin que tu puisses réussir tout problème d'optimisation.

#### **4- IDENTIFIER LES DEUX VARIABLES À OPTIMISER (ÉTAPE 1)**

Dans cette première étape de la méthode, il s'agit d'identifier les deux variables à optimiser. Généralement, la façon la plus simple de repérer ces deux variables parmi toutes les informations fournies par le problème est de consulter directement la question. Souvent, la question mentionne très clairement les variables du problème qui doivent être optimisées.

Il est important d'être très précis dans la façon d'identifier les variables. Par exemple,  $x$  associé au t-shirt et  $y$  au gilet à manches longues serait une mauvaise identification, car on ne sait pas qu'est-ce qui doit être optimisé en lien avec ces vêtements. S'agit-il de la quantité à produire ou des tailles qui doivent être privilégiées? Une bonne identification pourrait être :

$x$ : nombre de t-shirts fabriqués

$y$ : nombre de gilets à manches longues fabriqués

Dans un problème d'optimisation, il n'y a pas de notions de variables dépendantes et indépendantes, les variables  $x$  et  $y$  peuvent être attribuées à n'importe quel élément à optimiser.

## 5- LA TRADUCTION DES CONTRAINTES EN INÉQUATIONS (ÉTAPE 2)

Cette étape, la deuxième de la méthode d'optimisation, nous permet de transformer une information textuelle en langage mathématique. Cette **étape est déterminante** dans l'optimisation d'une situation. Si vous n'êtes pas capable de bien traduire les contraintes d'une situation sous forme d'inéquations, il vous sera impossible d'optimiser la situation.

Pour maîtriser cette étape, il est important d'être capable d'associer certaines expressions au signe d'inéquation approprié. L'exercice suivant vous aidera à développer cette habileté.

### Exercice 1 :

Écris sur la ligne le bon symbole d'inéquation ( $>$ ,  $<$ ,  $\geq$  et  $\leq$ ) entre les variables  $x$  et  $y$  pour les expressions suivantes :

- |                                     |   |               |
|-------------------------------------|---|---------------|
| 1. $x$ est inférieur ou égal à $y$  | → | $x$ _____ $y$ |
| 2. $x$ est supérieur à $y$          | → | $x$ _____ $y$ |
| 3. $x$ est plus petit que $y$       | → | $x$ _____ $y$ |
| 4. $x$ est plus grand ou égal à $y$ | → | $x$ _____ $y$ |
| 5. $x$ n'est pas plus grand que $y$ | → | $x$ _____ $y$ |
| 6. $x$ est au moins égal à $y$      | → | $x$ _____ $y$ |
| 7. $x$ est au minimum $y$           | → | $x$ _____ $y$ |
| 8. $x$ est moins que $y$            | → | $x$ _____ $y$ |
| 9. $x$ est au maximum $y$           | → | $x$ _____ $y$ |
| 10. $x$ n'est pas moins que $y$     | → | $x$ _____ $y$ |
| 11. $x$ est au moins autant que $y$ | → | $x$ _____ $y$ |
| 12. $x$ est au plus égal à $y$      | → | $x$ _____ $y$ |

Le corrigé de cet exercice est disponible à la fin dans ce document de ce cours.

Par expérience, un type de contraintes semble donner plus de difficultés aux élèves que les autres, il s'agit des contraintes utilisant un lien de proportionnalité entre les variables par exemple  $x$  est au moins le double de  $y$  ou  $y$  est au maximum le triple de  $x$ . La section théorique suivante te permettra de contourner cette difficulté et de ne pas tomber dans le piège de multiplier la mauvaise variable.

Exemple :

Frédéric a au moins trois plus de disques de musique rock que de disque de musique populaire.

Avant d'aller plus loin dans ce document, écrivez l'inéquation qui peut traduire mathématiquement la phrase précédente en associant la variable  $x$  aux disques rock et la variable  $y$  aux disques populaires.

Avez-vous écrit  $3x > y$ , si c'est le cas, vous êtes tombé dans le piège et vous venez d'introduire une erreur dans votre problème d'optimisation.

Comment ne pas tomber dans le piège ? Rappelez-vous tout simplement que pour représenter une inéquation il faut d'abord représenter une équation. Il vous faut donc créer l'égalité entre les deux variables. Si vous multipliez les disques de rock par trois, vous augmentez leur nombre, comme ils sont déjà supérieurs au disque populaire vous vous éloignez de l'égalité. Par contre, si vous multipliez les disques les moins nombreux, c'est-à-dire les disques populaires, vous augmentez leur nombre pour le rendre égal au nombre de disques de rock.

Donc en résumé :

On crée l'égalité en multipliant la variable associée au plus petit nombre d'objets.

$$x = 3y$$

On remplace le signe d'égalité en plaçant le signe d'inéquation correspondant à l'expression écrite.

Expression : *au moins*      inéquation correspondante :  $\geq$

$$\text{Donc : } x \geq 3y$$

## 6- LES CONTRAINTES DE POSITIVITÉ

La plupart des contraintes d'un problème d'optimisation sont énoncées dans la description de la situation à optimiser. Il existe des contraintes qui ne seront jamais mentionnées textuellement dans l'énoncé de la situation, mais qui doivent être ajoutées par la personne qui optimise la situation. Il s'agit des contraintes de positivité ou selon d'autres auteurs des contraintes de non-négativité. On applique ces contraintes lorsqu'une variable à optimiser ne peut être négative, donc que sa valeur est  $\geq 0$ .

Exemple : Dans un certain type d'avion, le total des sièges économiques (x) et des sièges de première classe (y) ne peut dépasser 350 sièges. On sait aussi qu'il n'y a pas plus de 50 sièges de première classe.

Voici les contraintes associées à cette situation :

$$x + y \leq 350$$

$$y \leq 50$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Les contraintes en caractère gras ne sont pas mentionnées dans le texte de la situation, ce sont les contraintes de positivité. Ces contraintes représentent le fait qu'il est impossible d'avoir un nombre négatif de sièges dans un avion. Ces contraintes permettent de contraindre le problème à une réponse positive ou nulle pour chacune des variables.

Il n'y a pas toujours de contraintes de positivité. Par exemple, si on cherche à optimiser la température d'un congélateur pour économiser du courant électrique, nous n'aurons pas de contraintes de positivité s'appliquant à la variable température, car une température négative est possible et logique.

## 7- EXERCICES

Mise à jour p.166 nos : 10 a), 13 1) et 2)

### Corrigé exercices 1 :

1. x est inférieur ou égal à y	→	$x \leq y$
2. x est supérieur à y	→	$x > y$
3. x est plus petit que y	→	$x < y$
4. x est plus grand ou égal à y	→	$x \geq y$
5. x n'est pas plus grand que y	→	$x \leq y$
6. x est au moins égal à y	→	$x \geq y$
7. x est au minimum y	→	$x \geq y$
8. x est moins que y	→	$x < y$
9. x est au maximum y	→	$x \leq y$
10. x n'est pas moins que y	→	$x \geq y$
11. x est au moins autant que y	→	$x \geq y$
12. x est au plus égal à y	→	$x \leq y$

## COURS 3

1- IDENTIFIER LA ZONE CONTENANT TOUTES LES POSSIBILITÉS RATTACHÉES À VOTRE SITUATION, CE QU'ON APPELLE LE **POLYGONE DE CONTRAINTES**.  
( ÉTAPE 3 )

Théorie par l'enseignant sur TI-Interactive

### Exemple :

Un éleveur de gibier sauvage élève des perdrix (x) et des cerfs (y). Le nombre de cerfs de son élevage est au maximum le triple des perdrix moins cinq animaux. Le nombre de cerfs est supérieur ou égal au nombre de perdrix auquel on retrancherait six individus. L'élevage compte moins de 10 cerfs.

Voici le système d'inéquations représentant cette situation :

$$\begin{aligned}y &\leq 3x - 5 \\y &\geq x - 6 \\y &< 10 \\y &\geq 0 \\x &\geq 0\end{aligned}$$

Lectures complémentaires :

P.162 et p.163 section Savoirs 7.1

## 2- LA NOTATION FONCTIONNELLE D'UNE FONCTION LINÉAIRE

Pour représenter une équation linéaire dans le plan cartésien, elle doit être sous forme fonctionnelle, c'est-à-dire avec son « y » d'isolé. Cette forme nous permet de repérer l'ordonnée à l'origine et le taux de variation de la droite.

Exemple :

$$2x + 4y \leq 12$$

$$4y \leq 12 - 2x$$

$$y \leq \frac{12 - 2x}{4}$$

$$y \leq \frac{12}{4} - \frac{2x}{4}$$

$$y \leq 3 - \frac{x}{2}$$

$$y \leq -\frac{x}{2} + 3$$

Sous cette forme, il est possible de remarquer facilement que l'ordonnée à l'origine est 3 et que le taux de variation est de  $-\frac{1}{2}$

## 2- EXERCICES

Mise au point 7.1 p.164 nos : 2, 6, 10 c), 11, 13\* 3) et 14

\* Le no 13 a déjà été commencé au cours précédent, il s'agit de faire l'étape 3)

# COURS 4

## 1- DÉTERMINER ALGÈBRIQUEMENT LES SOMMETS DU POLYGONE DE CONTRAINTES ( ÉTAPE 4 )

De toutes les solutions aux problèmes contenues dans le polygone de contraintes, seulement quelques points sont susceptibles de minimiser ou de maximiser la situation. Il s'agit des sommets du polygone de contraintes.

Ces sommets sont des intersections entre deux droites. Lorsque deux droites se croisent, on est en présence d'un **système d'équations**. Lorsqu'on résout mathématiquement un système d'équations, la réponse obtenue correspond aux coordonnées du point d'intersection entre ces deux droites.

Il existe trois méthodes différentes permettant de résoudre un système d'équations, tu trouveras ces trois méthodes dans la moitié du haut de la page 150 de ton manuel. Assure-toi de bien comprendre ces trois méthodes.

**IMPORTANT** : La méthode de réduction, démontrée à la page 150, ne permet pas que d'éliminer la variable « y » pour trouver en un premier temps la valeur de la variable « x ». Il est possible de choisir d'éliminer la variable « x » pour trouver la valeur de la variable y.

## 2- TOUVER LES SOMMETS DU POLYGONE DE CONTRAINTES DE NOTRE ÉLEVAGE DE CERFS ET PERDRIX ( EXEMPLE DU COURS 3 )

Noter que nous ferons une petite modification au problème. Nous remplacerons la contrainte « L'élevage compte moins de 10 cerfs. » par « L'élevage compte au plus 10 cerfs. ». Ce changement nous permettra d'avoir un polygone de contraintes uniquement bordé par des droites en trait plein.

Tu trouveras le corrigé de cette étape à la fin de ce cours.

## 3- EXERCICES

Mise à jour p.154 nos : 1, 4

Mise au point 7.1 p.164 nos : 3 a), b) et d), 13\* 4) , 5) et 6)

\* Le no 13 a déjà été commencé aux cours précédents, il s'agit de le terminer.

### Corrigé :

Sommets du polygone de contraintes du problème de l'élevage des perdrix et des cerfs

(1.66667, 0.)  
(5., 10.)

(6., 0.)  
(16., 10.)

# COURS 5

## 1- CONSTRUIRE LA RÈGLE À OPTIMISER ( ÉTAPE 5 )

Reprenons notre problème d'élevage de cerfs et de perdrix et ajoutons-lui quelques informations, en bleu, pour qu'il devienne un vrai problème d'optimisation :

« Un éleveur de gibier sauvage élève des perdrix (x) et des cerfs (y). Le nombre de cerfs de son élevage est au maximum le triple des perdrix moins cinq animaux. Le nombre de cerfs est supérieur ou égal au nombre de perdrix auquel on retrancherait six individus. L'élevage compte au plus 10 cerfs. **Sachant que la vente d'une perdrix rapporte à l'éleveur 8\$ et que celle d'un cerf 86\$, combien d'animaux de chaque sorte doit-il élever pour maximiser ses profits ?** »

L'objectif du problème est clair, nous devons maximiser les profits. Pour ce faire, nous devons bâtir une équation mathématique permettant le calcul des profits, il s'agit de la règle que nous devons optimiser :

$$P = 8x + 86y \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} P = \text{Profits (\$)} \\ x = \text{Nombre de perdrix élevées} \\ y = \text{Nombre de cerfs élevés} \end{array}$$

## 2- TESTER LES SOMMETS DU POLYGONE DANS LA RÈGLE À OPTIMISER ( ÉTAPE 6 )

Nous savons que seuls les sommets du polygone de contraintes sont susceptibles d'être un maximum ou un minimum. À cette étape, il suffit donc d'insérer chacun de nos sommets dans la règle objectif afin de découvrir quel sommet maximise l'objectif ou quel sommet minimise l'objectif.

L'utilisation d'un tableau facilite énormément cette démarche et rend la communication très claire. Voici à quoi peut ressembler un tel tableau pour le problème de l'élevage des cerfs et des perdrix.

SOMMETS	$P = 8x + 86y$	Profit (\$)
(1.66667, 0.)	$P = 8 \cdot 1.66667 + 86 \cdot 0$ $P = 13,334 + 0$	13,33
(5., 10.)	$P = 8 \cdot 5 + 86 \cdot 10$ $P = 40 + 860$	900
(6., 0.)	$P = 8 \cdot 6 + 86 \cdot 0$ $P = 48 + 0$	48
(16., 10.)	$P = 8 \cdot 16 + 86 \cdot 10$ $P = 128 + 860$	988

3- IDENTIFIER LE SOMMET QUI VOUS DONNE LA VALEUR MINIMUM OU MAXIMUM DONNÉE PAR VOTRE RÈGLE À OPTIMISER ( ÉTAPE 7 )

Le tableau nous montre clairement le profit minimal et le profit maximal, il suffit donc de faire le bon choix selon votre objectif. Dans le cas de notre élevage, on doit maximiser les profits, le tableau nous montre clairement que le sommet (16,10) engendre un profit maximal. Il suffit donc de mettre en évidence ce sommet dans le tableau.

SOMMETS	$P = 8x + 86y$	Profit (\$)
(1.66667, 0.)	$P = 8 \cdot 1.66667 + 86 \cdot 0$ $P = 13,334 + 0$	13,33
(5., 10.)	$P = 8 \cdot 5 + 86 \cdot 10$ $P = 40 + 860$	900
(6., 0.)	$P = 8 \cdot 6 + 86 \cdot 0$ $P = 48 + 0$	48
(16., 10.)	$P = 8 \cdot 16 + 86 \cdot 10$ $P = 128 + 860$	988

**Maximum**

Ensuite, il faut formuler notre réponse sous la forme d'un court texte :

« Réponse : Le profit maximum atteint sera de 988\$ en élevant 16 perdrix et 10 cerfs. »

4- EXERCICES

Mise au point 7.2 p.174

nos : 1, 2,

3 en c) ne pas utiliser les points donnés, mais trouver le vrai minimum et le vrai maximum

4 a),

7 en b) ne pas évaluer les suggestions, mais trouver le revenu maximal.

**8 IMPORTANT :** Comme certains sommets sont des nombres décimaux, ce qui est impossible dans la situation, il faut retracer le polygone de contraintes en prenant les points entiers le plus près des sommets non entiers comme nouveaux sommets.

Corrigé en lien avec les changements aux questions 3 et 7:

3 c) Coût minimum : 192 000\$ pour un mat d'une hauteur de 90m et un rotor de 60m de diamètre.  
Coût maximum : 256 000\$ pour un mat d'une hauteur de 120m et un rotor de 80m de diamètre.

7 b) Revenu maximal: 160938\$ pour la vente de 218750 crayons HB et 68750 crayons 3H

# COURS 6

## 1- VERIFIER VOTRE RÉPONSE PAR LA DROITE BALADEUSE. (ÉTAPE 8)

La droite baladeuse est un autre outil que le tableau vu au cours précédent pour repérer la valeur minimale ou la valeur maximale d'une situation. Elle est générée à partir de la règle objectif.

Nous nous servirons encore du problème de l'élevage de gibier pour découvrir les étapes par lesquelles passer pour utiliser la droite baladeuse :

- 1) Entrer un produit fictif dans la règle objectif

$$P = 8x + 86y$$

Choisissons un produit fictif de 1000\$, l'équation devient donc :  $1000 = 8x + 86y$

Le choix du profit est vraiment arbitraire, toute autre valeur que 1000\$ aurait aussi permis de générer la droite baladeuse.

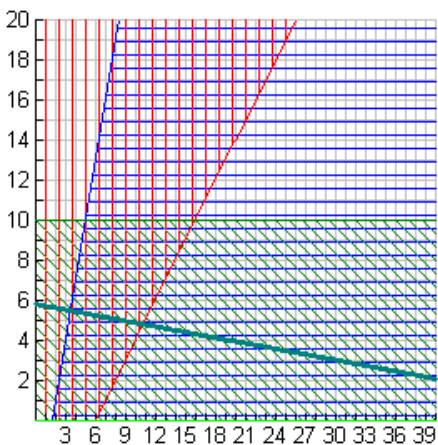
- 2) Écrire l'équation obtenue sous **forme fonctionnelle**, c'est-à-dire la forme de l'équation où la variable  $y$  est isolée pour obtenir l'équation de la **droite baladeuse**.

$$8x + 86y = 1000$$

$$86y = 1000 - 8x$$

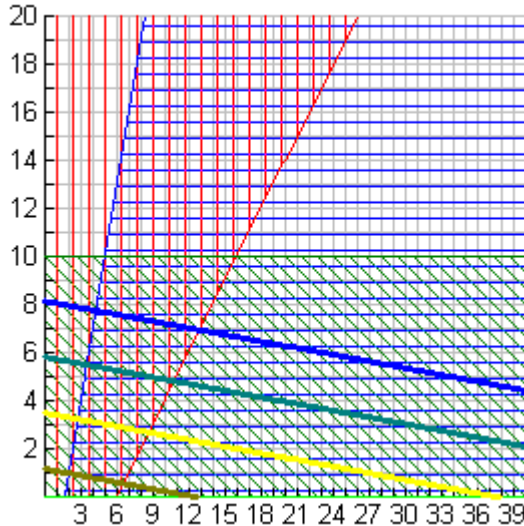
$$y = \frac{1000 - 8x}{86}$$

- 3) Représenter la droite baladeuse dans votre graphique



La droite baladeuse est symbolisée par la droite en trait gras dans le graphique.

La position de la droite est en lien avec le profit fictif que vous avez choisi comme le montre le graphique suivant. Cette position n'est pas notre point d'intérêt. Notre point d'intérêt se situe au point de vue de l'angle de la droite.



Cette figure montre la droite baladeuse tracée pour différents profits :

Droite brune = profit de 100\$

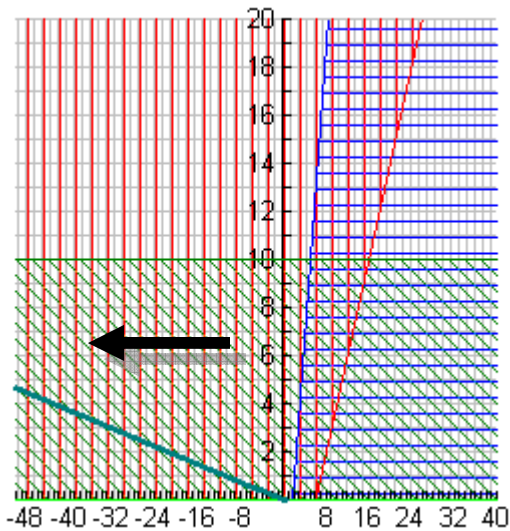
Droite jaune = profit de 300\$

Droite verte = profit de 500\$

Droite bleue = profit de 700\$

Ce qui est important de remarquer est que la droite baladeuse a toujours le même angle (taux de variation)

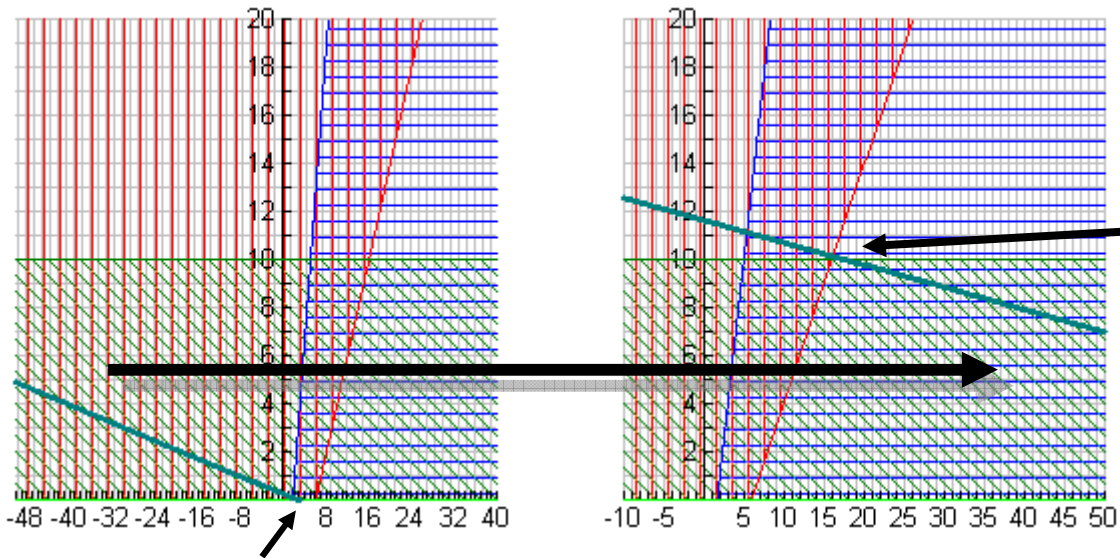
- 4) Faites mentalement une transition horizontale de la droite de façon à ce qu'elle soit complètement située à gauche de votre polygone de contraintes



- 5) SCANNER LE POLYGONE DE CONTRAINTES EN DÉPLACEMENT MENTALEMENT VOTRE DROITE BALADEUSE VERS LA DROITE

En glissant horizontalement votre droite vers la droite, elle entrera successivement en contact avec tous les sommets de votre polygone de contraintes. Il vous suffit

alors de savoir que votre minimum sera le premier sommet touché par la droite baladeuse alors que votre maximum sera le dernier sommet touché par votre droite baladeuse.



Premier sommet rencontré par la droite baladeuse, c'est votre minimum

Dernier sommet rencontré par la droite baladeuse, c'est votre maximum

On peut observer que le dernier sommet rencontré par la droite baladeuse lors de sa translation horizontale vers la droite est le sommet  $(16, 10)$  ce qui valide la réponse obtenue par le tableau.

## 2- EXERCICES

Mise au point 7.3 p.186

nos : 1, 3, 4, 5

# COURS 6

## PROBLÈMES D'OPTIMISATION

Tu es maintenant prêt à appliquer toutes les étapes successivement afin d'optimiser diverses situations.

## 1- EXERCICES

Mise au point 7.3 p.186

nos : 9, 10, 11, 12, 14

## **COURS 7**

Travail sur la SAÉ d'équipe : « Encadrement Bozart »

### **PÉRIODE D'ÉTUDE**

( À déterminer lorsque vous aurez eu la correction de la SAÉ d'équipe )

### **SAÉ INDIVIDUEL**